

РОЗДІЛ 4. ПОШИРЕННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ХВИЛЬ В ВИСОКОЕЛАСТИЧНИХ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ПРОКОВЗУВАННІ ШАРІВ

Як було зазначено в першому розділі у роботах О. М. Гузя [78, 81, 135], О. М. Гузя, Н. А. Сітенка, О. П. Жука [64], Н. А. Сітенка [145] розглянуті питання про поширення в радіальному напрямку вісесиметричних хвиль в шаруватих композитних матеріалах періодичної структури у випадку повного контакту шарів композитного матеріалу. Чисельний аналіз отриманих дисперсійних рівнянь був проведений **тільки** для порівняно жорстких стисливих матеріалів з пружним потенціалом типу Мурнагана.

У цьому розділі чисельно досліджуються розв'язки дисперсійних рівнянь, отриманих в роботах [78, 81] для випадку повного контакту шарів композитного нестисливого матеріалу, та аналогічні розв'язки дисперсійних рівнянь для випадку повного проковзування шарів (розділ 3). Проведено порівняння отриманих результатів.

4.1. Значення складових тензора κ' для найпростіших пружних потенціалів

Приведемо значення складових тензора κ' , що входять в основні співвідношення і загальні розв'язки задачі для нестисливих тіл в попередніх параграфах. Розглянемо два пружних потенціала, що відносяться до теорії скінченних (великих) початкових деформацій: потенціал Трелоара та потенціал Бартенєва-Хазановича [80].

Потенціал Трелоара. Потенціал Трелоара можна записати у вигляді

$$w^{(j)} = 2c_{10}^{(j)} A_1^{(j)}, \quad (4.1)$$

де $c_{10}^{(j)}$ – пружна стала, $A_1^{(j)}$ – алгебраїчний інваріант.

При умові (3.2) для складових тензора $\kappa'^{(j)}$ маємо

$$\begin{aligned}
\kappa'_{1111} &= \lambda_1^{(j)2} \left(-2p_0^{(j)} \lambda_1^{(j)-2} + S_{11}^{0(j)} \right); & \kappa'_{3113} &= \lambda_3^{(j)2} \left(-p_0^{(j)} \lambda_3^{(j)-2} + S_{33}^{0(j)} \right); \\
\kappa'_{3333} &= \lambda_3^{(j)2} \left(-2p_0^{(j)} \lambda_3^{(j)-2} + S_{33}^{0(j)} \right); & \kappa'_{1313} &= \lambda_1^{(j)} \lambda_3^{(j)} \left(-p_0^{(j)} \lambda_1^{(j)-1} \lambda_3^{(j)-1} + S_{33}^{0(j)} \right); \\
\kappa'_{1331} &= \lambda_1^{(j)2} \left(-p_0^{(j)} \lambda_1^{(j)-2} + S_{11}^{0(j)} \right); & \kappa'_{1133} &= 0; & S_{\beta\beta}^{0(j)} &= 2c_{10}^{(j)} + p_0^{(j)} \lambda_{\beta}^{(j)-2}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Потенціал Бартенєва-Хазановича. Потенціал Бартенєва-Хазановича має вигляд

$$\Phi^{(j)} = 2\mu^{(j)} S_1^{(j)}, \tag{4.3}$$

де $\mu^{(j)}$ – пружна стала, $S_1^{(j)}$ – інваріант тензора деформацій.

При умові (3.2) для складових тензора $\kappa'^{(j)}$ маємо

$$\begin{aligned}
\kappa'_{1111} &= \kappa'_{3333} = -p_0^{(j)}; & \kappa'_{1133} &= \kappa'_{3311} = 0; \\
\kappa'_{1313} &= \kappa'_{3131} = -\frac{2\mu^{(j)} \lambda_1^{(j)} \lambda_3^{(j)}}{\lambda_1^{(j)} + \lambda_3^{(j)}} - p_0^{(j)}; & \kappa'_{1331} &= \frac{2\mu^{(j)} \lambda_1^{(j)2}}{\lambda_1^{(j)} + \lambda_3^{(j)}}; \\
\kappa'_{3113} &= \frac{2\mu^{(j)} \lambda_3^{(j)2}}{\lambda_1^{(j)} + \lambda_3^{(j)}}; & S_0^{\beta\beta} &= (2\mu^{(j)} \lambda_{\beta}^{(j)} + p_0^{(j)}) \lambda_{\beta}^{(j)-2}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2. Дослідження коренів характеристичних рівнянь

Проаналізуємо залежність значень коренів характеристичних рівнянь (3.38) від фазової швидкості та початкових напружень. Значення функцій $\alpha_1^{(j)2}$ і $\alpha_2^{(j)2}$ визначають вид рівнянь руху (3.17) і відповідно вибір форми розв'язку цих рівнянь.

Запишемо розв'язок рівнянь (3.39) у вигляді

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,2}^{(j)2} &= \frac{1}{2\kappa'_{3113}} \left\{ C^2 \varrho'^{(j)} - \kappa'_{3333} - \kappa'_{1111} + 2 \left(\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313} \right) \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \left[\left[C^2 \varrho'^{(j)} - \kappa'_{3333} - \kappa'_{1111} + 2 \left(\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313} \right) \right]^2 + 4\kappa'_{3113} \left(C^2 \varrho'^{(j)} - \kappa'_{1331} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Представимо значення функцій (4.5) для пружних потенціалів Трелоара (4.1) та Бартенєва-Хазановича (4.3).

Потенціал Трелоара. Формули (4.5) з врахуванням (4.2) можна записати у вигляді

$$\alpha_1^{(j)2} = -1; \quad \alpha_2^{(j)2} = \lambda_1^{(j)4} \frac{C^2}{C_s^{0(j)2}} - 1; \quad C_s^{0(j)2} = \frac{2c_{10}^{(j)}}{\rho^{(j)}}. \quad (4.6)$$

В (4.6) $C_s^{0(j)}$ – швидкість поперечних хвиль в ізотропному матеріалі j -го шару композиту без початкових напружень.

Із (4.6) слідує, що у випадку пружного потенціалу типу Трелоара функції $\alpha_1^{(j)2}$ і $\alpha_2^{(j)2}$ є дійсними. Корінь характеристичного рівняння (3.39) $\alpha_1^{(j)}$ є чисто уявним ($\alpha_1^{(j)} = i$). Функція $\alpha_2^{(j)2}$ може приймати як від'ємні, так і додатні значення. У випадку, якщо $C/C_s^{0(j)} \geq \lambda_1^{(j)-2}$, корінь $\alpha_2^{(j)}$ буде дійсним, інакше – чисто уявним.

На рис. 4.1 і 4.2 показана залежність характеристичних коренів $\alpha_1^{(j)2}$ і $\alpha_2^{(j)2}$ від фазової швидкості та початкових напружень для пружного потенціалу типу Трелоара.

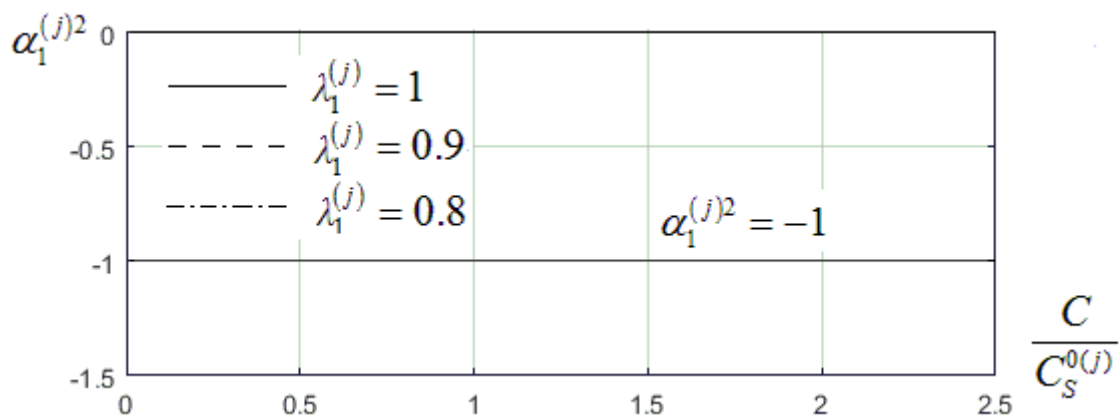


Рис. 4.1

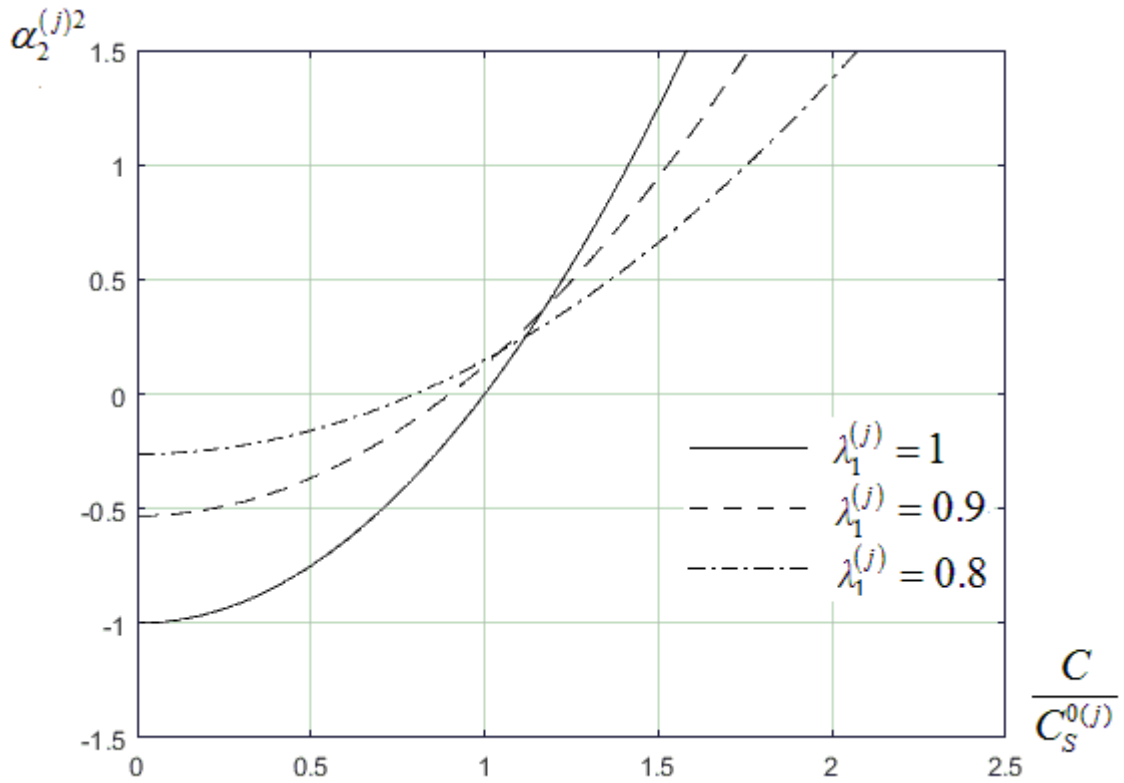


Рис. 4.2

Потенціал Бартенєва-Хазановича. Для даного пружного потенціалу з (4.5) і (4.4) маємо

$$\alpha_{1,2}^{(j)2} = \frac{\lambda_1^{(j)2}}{4} \left(\lambda_1^{(j)3} + 1 \right) \left\{ \frac{C^2}{C_S^{0(j)2}} - \frac{4\lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)3} + 1} \pm \frac{C}{C_S^{0(j)}} \left[\frac{C^2}{C_S^{0(j)2}} - \frac{8}{\lambda_1^{(j)2}} \frac{\lambda_1^{(j)3} - 1}{\lambda_1^{(j)3} + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}; \quad (4.7)$$

$$C_S^{0(j)2} = \frac{\mu^{(j)}}{\varrho^{(j)}}.$$

В (4.7) $C_S^{0(j)}$ – також, як і у випадку потенціалу Трелоара, швидкість поперечних хвиль в ізотропному матеріалі j -го шару композиту без початкових напружень.

Із (4.7) маємо, що функції $\alpha_1^{(j)2}$ і $\alpha_2^{(j)2}$ у випадку потенціалу Бартенєва-Хазановича залежать від фазової швидкості і початкових напружень і можуть приймати як дійсні, так і комплексні значення. Функції $\alpha_1^{(j)2}$ і $\alpha_2^{(j)2}$ дійсні, якщо

$$\frac{C}{C_s^{0(j)}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1^{(j)}} \sqrt{\frac{\lambda_1^{(j)3} - 1}{\lambda_1^{(j)3} + 1}}.$$

На рис. 4.3 і 4.4 показана залежність характеристичних коренів $\alpha_1^{(j)2}$ і $\alpha_2^{(j)2}$ від фазової швидкості та початкових напружень для пружного потенціалу Бартенсе-Хазановича.

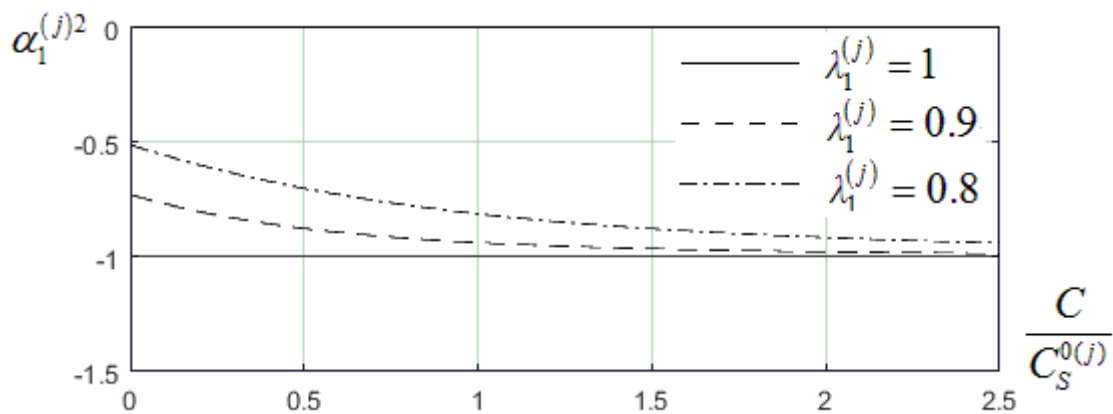


Рис. 4.3.

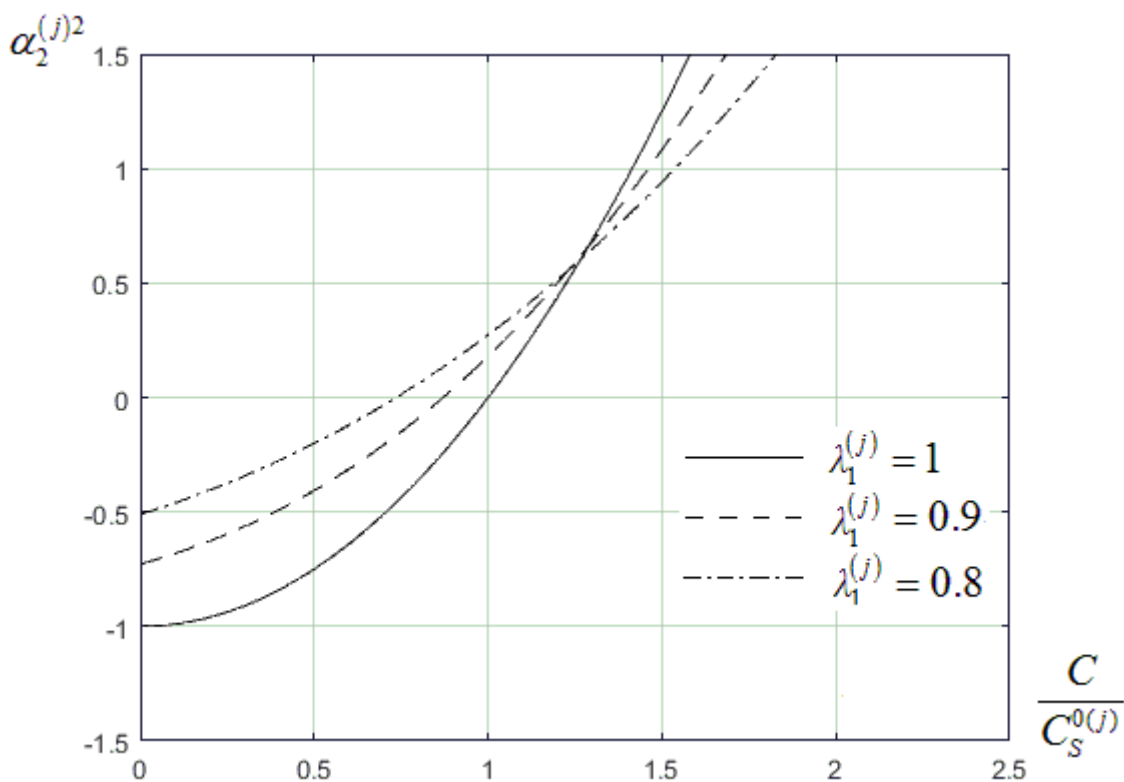


Рис. 4.4.

В даному випадку для двох типів пружних потенціалів порівнювалися матеріали з однаковою швидкістю поширення поперечних (зсувних) хвиль при відсутності початкових напружень.

4.3. Чисельний аналіз розв'язків дисперсійних рівнянь

Дисперсійне співвідношення (5.4) отримане для пружного потенціалу довільної форми. Для проведення числового аналізу конкретизуємо вигляд пружного потенціалу. Розглянемо закономірності впливу початкових напружень на швидкість поширення квазіпоперечних хвиль в композитному високоеластичному матеріалі з пружним потенціалом Трелоара (4.1). Для визначення складових тензора $\kappa'^{(j)}$ скористаємося формулами (4.2).

Розрахунки проведемо при початковому стані

$$S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq 0; \quad S_{33}^{0(j)} = 0; \quad \lambda^{(j)} = \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad \lambda_3^{(j)} = \lambda^{(j)-2};$$

та наступних співвідношеннях механічних характеристик шарів композиту

$$c_{10}^{(1)} / c_{10}^{(2)} = 5; \quad \varrho^{(2)} / \varrho^{(1)} = 0,7.$$

На всіх рисунках введені такі позначення: $C/C_S^{0(2)}$ – безрозмірна швидкість поширення хвилі в шаруватому композитному матеріалі, $\bar{h}$ – приведена частота ($\bar{h} = k_S^{0(2)} h^{(2)}$), $k_S^{0(2)}$ – хвильове число, $C_S^{0(2)}$ – швидкість поперечних хвиль в ізотропному матеріалі другого шару без початкових напружень, m – параметр шаруватості ($m = h^{(1)} / h^{(2)}$), ζ – відносна фазова швидкість ($\zeta = (C^0 - C) / C^0$), C^0 – швидкість квазіпоперечних хвиль, що поширюються в напрямку осі Or' вздовж шарів нестисливого композитного матеріалу без початкових напружень, C – така ж швидкість при початкових напруженнях.

Для матеріалів з пружним потенціалом типу Трелоара та Бартенєва-Хазановича нижче проведені результати чисельних досліджень впливу початкових напружень, умов контакту шарів композитного матеріалу і

параметру шаруватості на істину фазову швидкість вісесиметричних квазіпоперечних хвиль.

Результати представлені в вигляді залежності безрозмірної швидкості поширення хвиль $C/C_s^{0(2)}$ від приведеної частоти $\bar{h}$ для перших п'яти мод. Моді позначені цифрами 0 – 4.

На рис. 4.5 приведені результати числових розрахунків для квазіпоперечної хвилі, яка поширюється вздовж шарів композитного матеріалу з пружним потенціалом типу Трелоара при повному контакті шарів та при проковзуванні шарів.

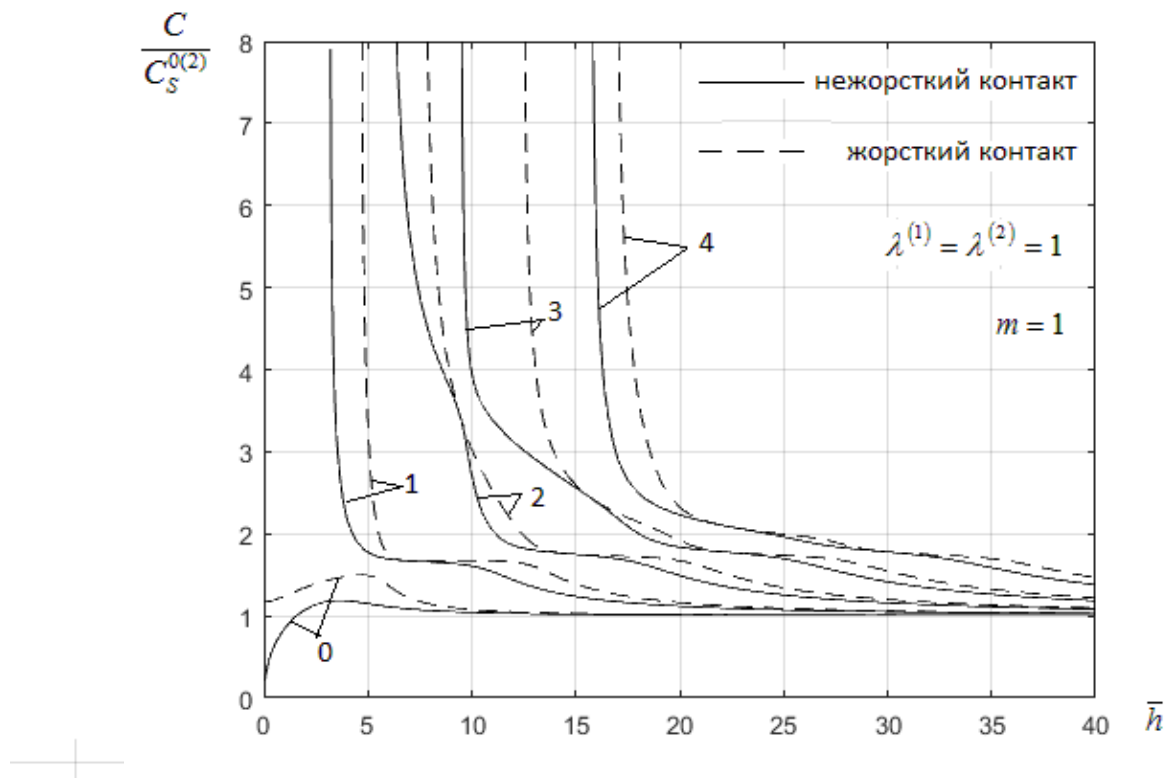


Рис. 4.5

Пунктирні криві відповідають дисперсійним кривим для випадку повного контакту (жорсткий контакт) шарів композитного матеріалу, суцільні криві відповідають дисперсійним кривим для випадку повного проковзування (нежорсткий контакт).

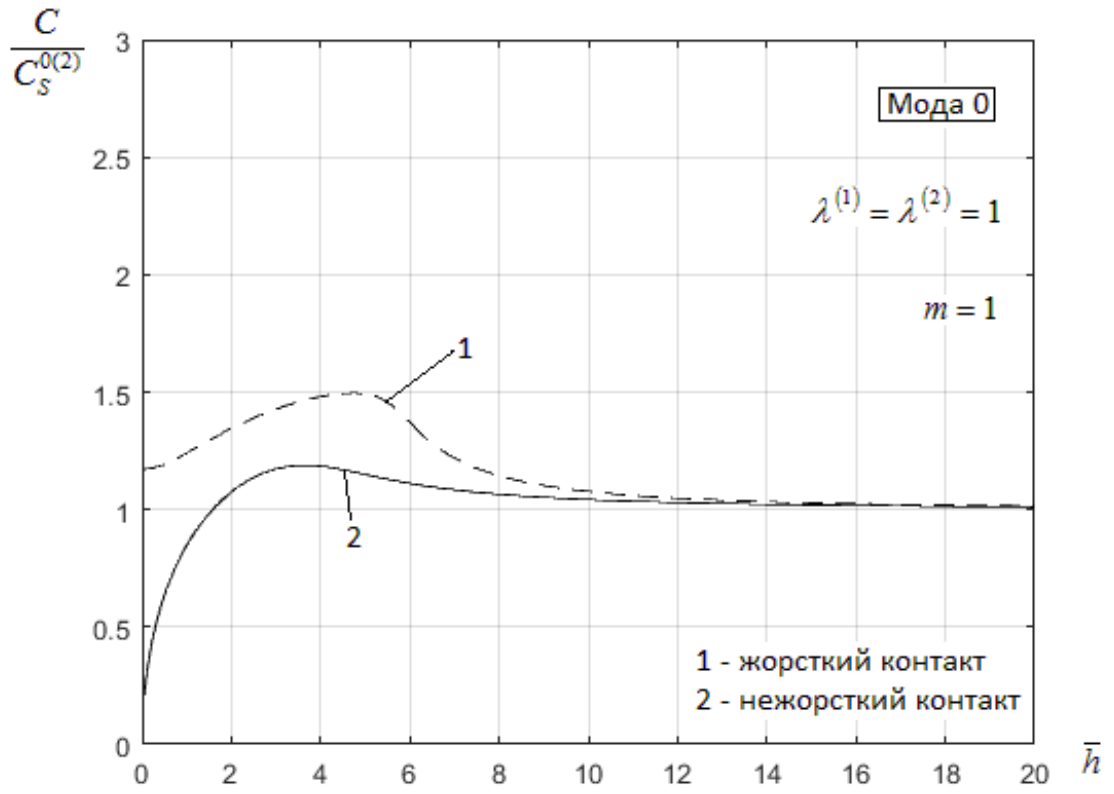


Рис. 4.6

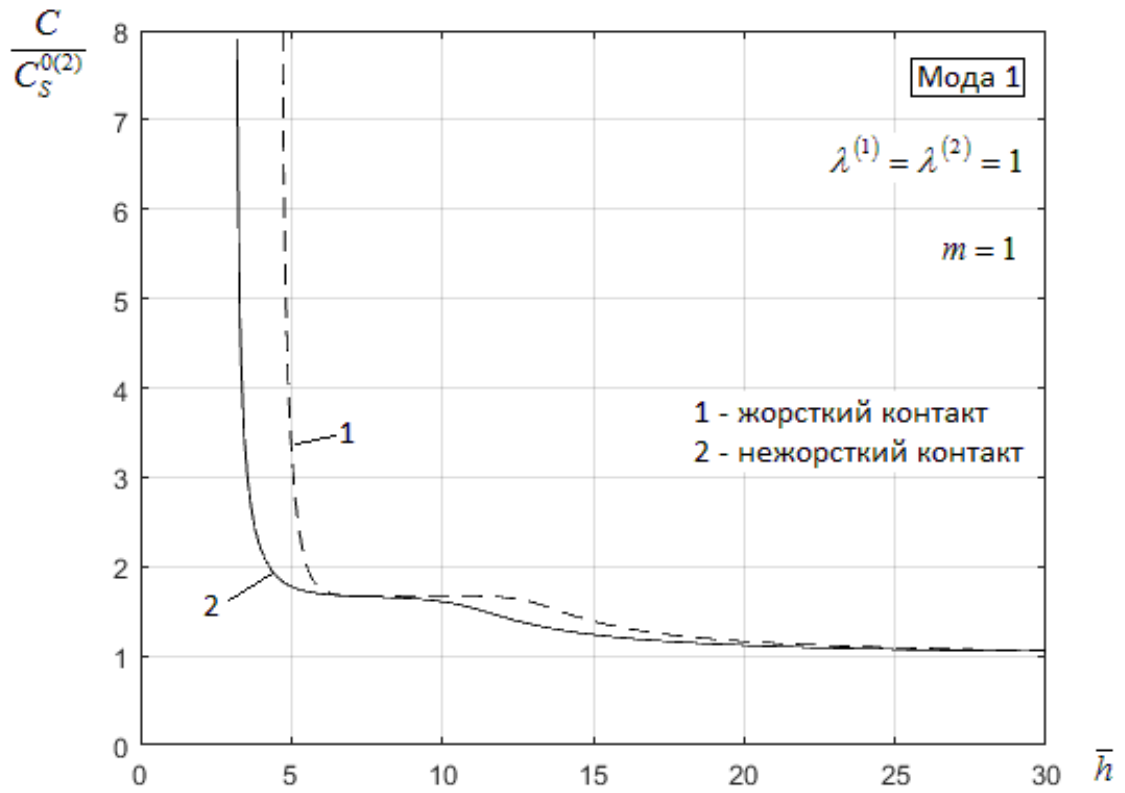


Рис. 4.7

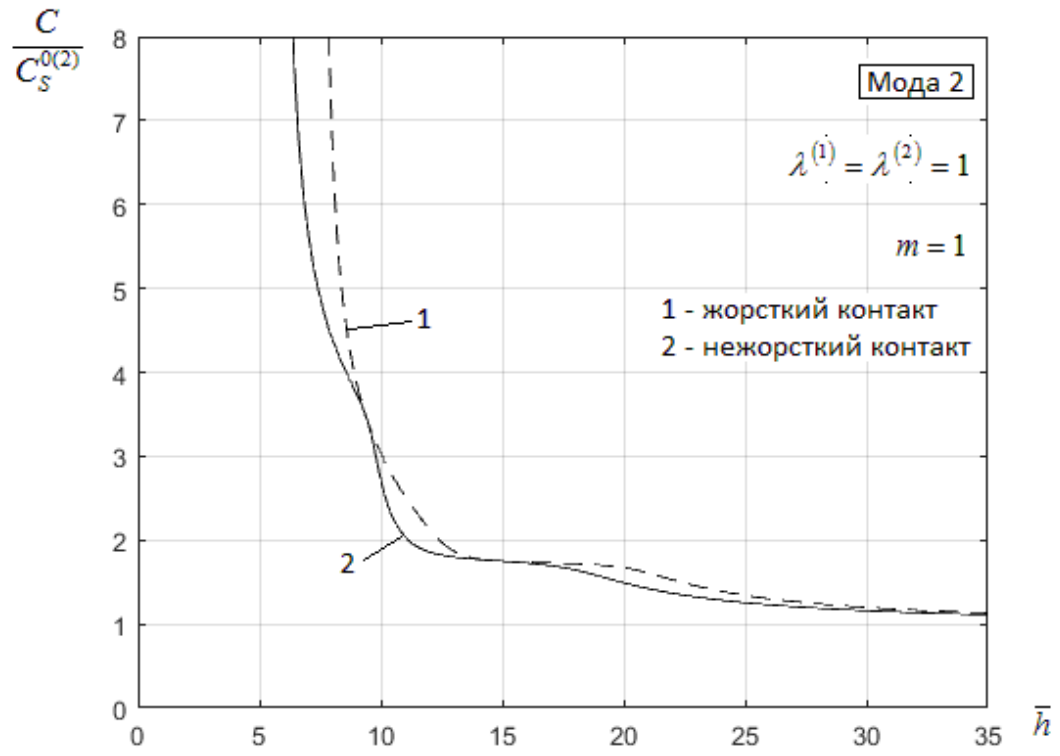


Рис. 4.8

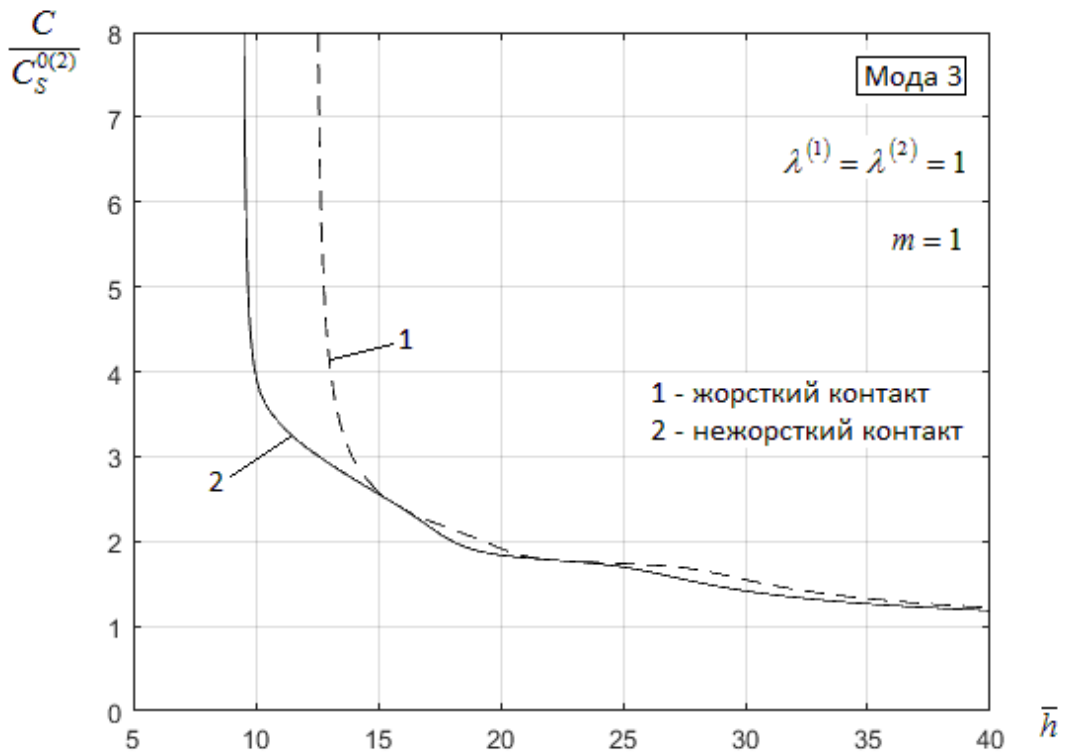


Рис. 4.9

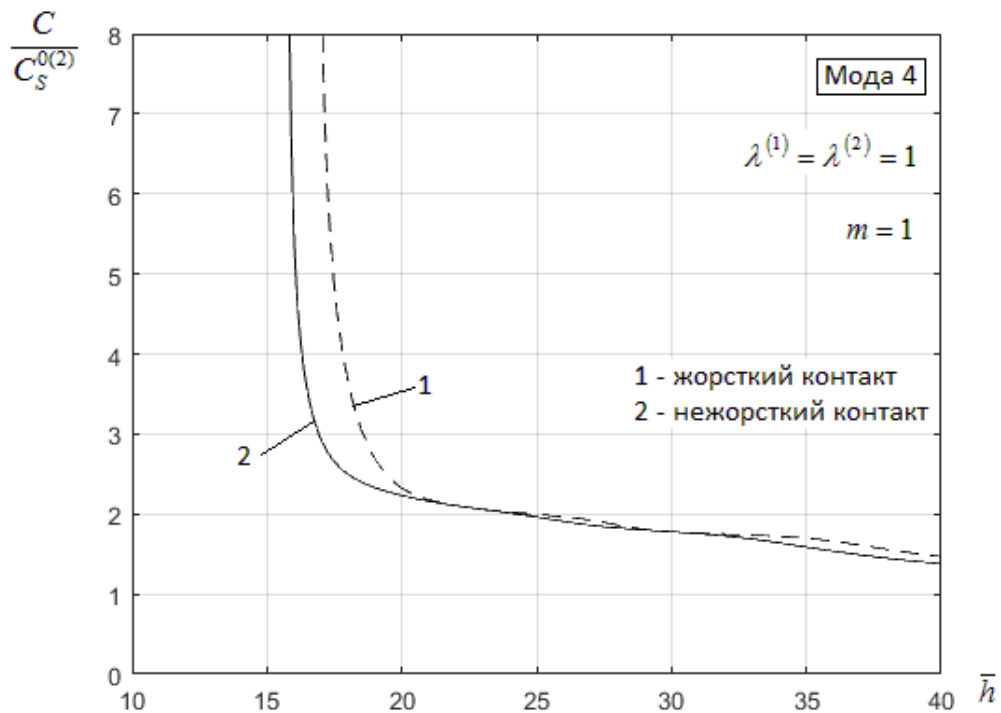


Рис. 4.10

На рис. 4.6– 4.10 кожна із мод представлена окремо і в більшому масштабі. Приведені на рис. 4.5 – 4.10 результати відповідають ненапруженому початковому стану.

Криві для різних умов контакту на рис. 4.5– 4.10 визначають діапазон зміни фазової швидкості квазіпоперечної вісесиметричної хвилі, що визначається двома граничними умовами контакту шарів композитного матеріалу. З міркувань фізичного характеру, слідує, що дисперсійні криві на рис. 4.5– 4.10 визначають область розв’язку дисперсійного рівняння при інших можливих варіантах умовах контакту між шарами для зазначеного вище початкового напруженого стану.

З рис. 4.5 – 4.10 також слідує, що фазова швидкість та значення критичних частот при повному контакті завжди більші, ніж при повному проковзуванні. Існують області значення частот, де фазові швидкості суттєво залежать від умов контакту між шарами композитного матеріалу. Особливо це стосується значень частот, близьких до критичних. Також, при певних значення частот фазова швидкість майже не залежить від умов контакту.

На рис. 4.11 – 4.20 показані залежності безрозмірних швидкостей поширення вісесиметричної хвиль в шаруватому композитному матеріалі $C/C_s^{0(2)}$ від приведеної частоти $\bar{h}$ та початкових напружень $\lambda_1^{(j)}$ при $m=1$ для перших п'яти мод.

Рис. 4.11 – 4.15 відповідають контакту с проковзуванням (нежорсткий контакт), а рис. 4.16 – 4.20 – повному контакту між шарами композитного матеріалу (жорсткий контакт).

Вважалося, що перший шар композитного матеріалу є ненапруженим ($\lambda_1^{(1)}=1$), а початковий напружений стан композитного матеріалу визначається різними початковими напруженнями в другому шарі композиту. Дисперсійні криві позначені цифрами 1, 2, 3, 4, 5 відповідають початковим напруженням в другому шарі $\lambda_1^{(2)}=0.8$, $\lambda_1^{(2)}=0.9$, $\lambda_1^{(2)}=1$, $\lambda_1^{(2)}=1.1$ і $\lambda_1^{(2)}=1.2$.

На рис. 4.12а, 4.17а, 4.18а відповідні моди показані в більшому масштабі для чіткішого розуміння їх поведінки в виділених областях.

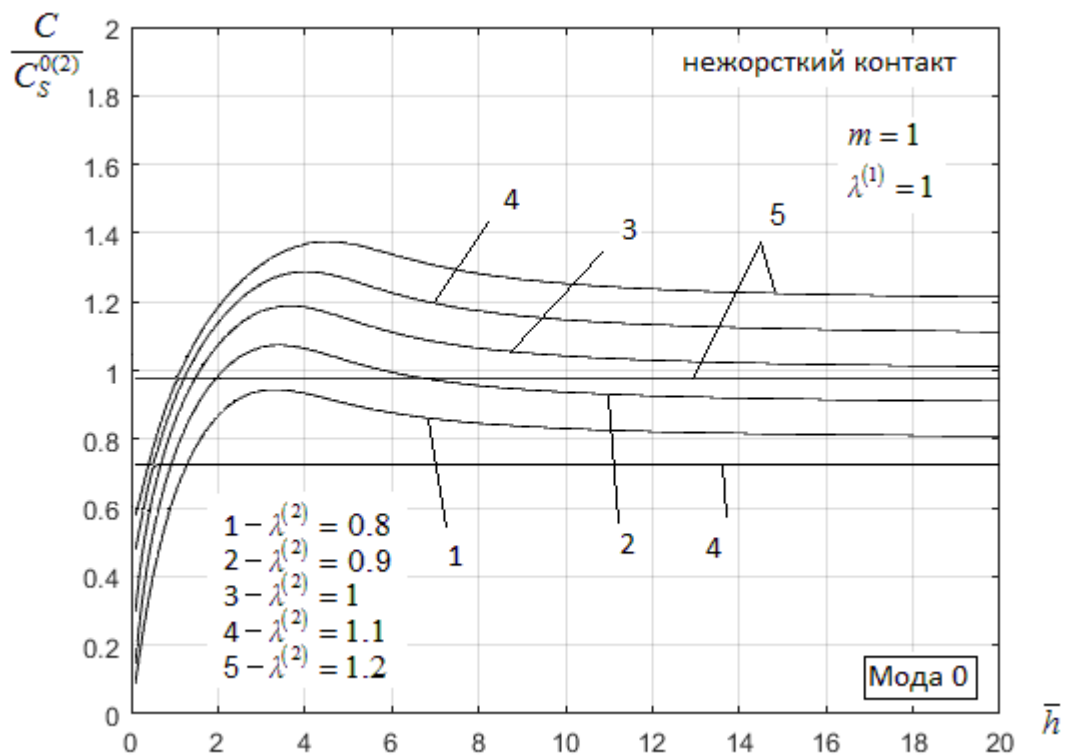


Рис. 4.11

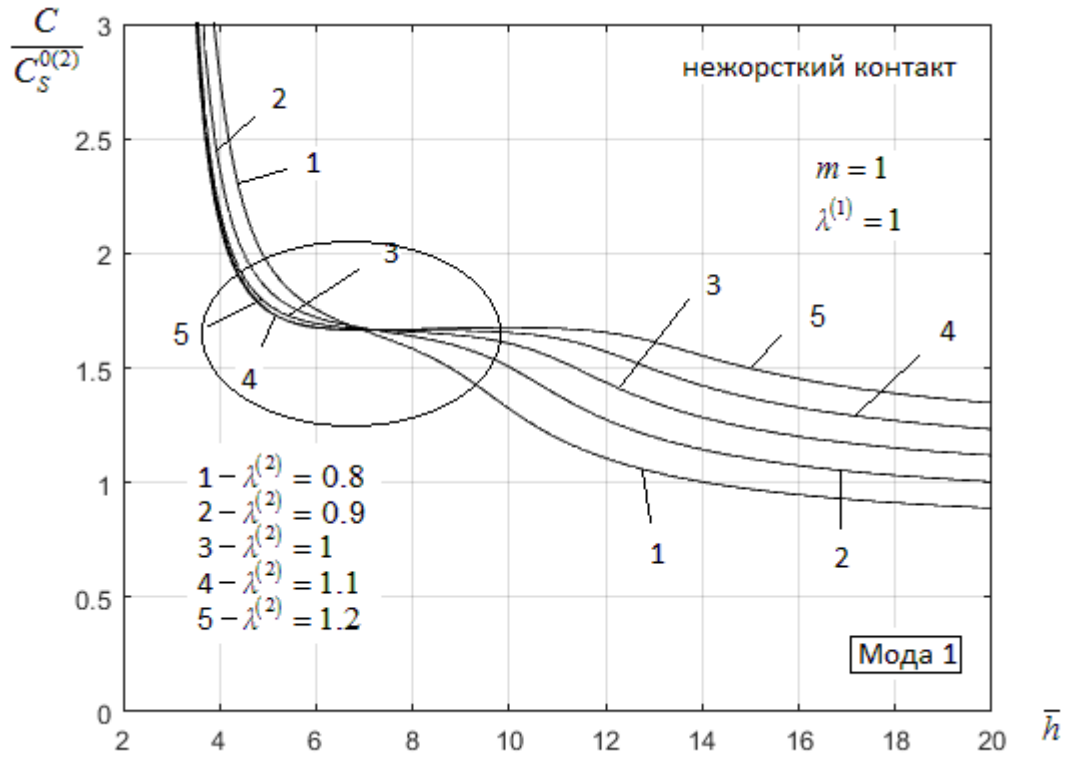


Рис. 4.12

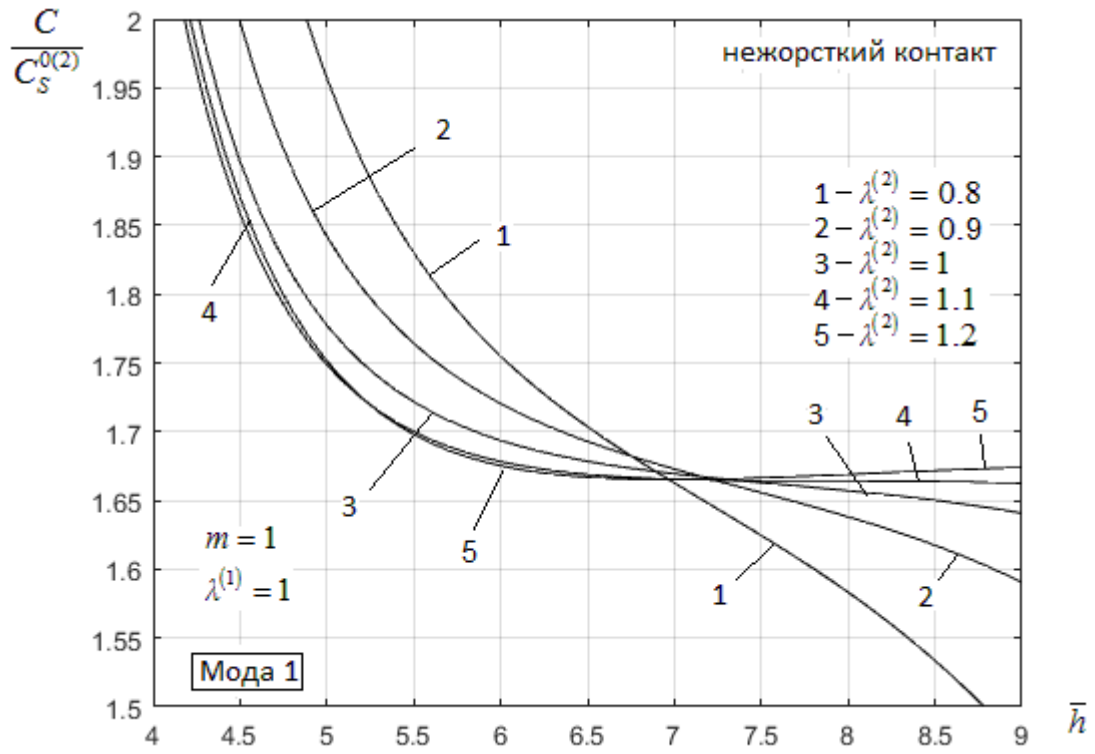


Рис. 4.12а

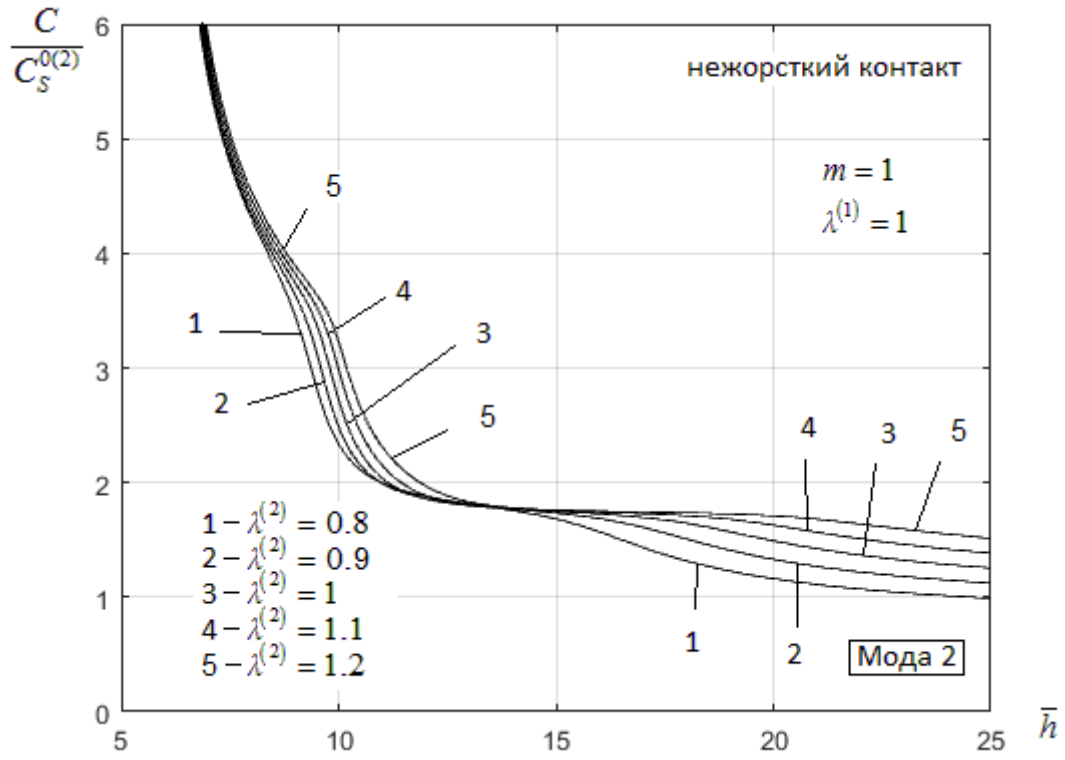


Рис. 4.13

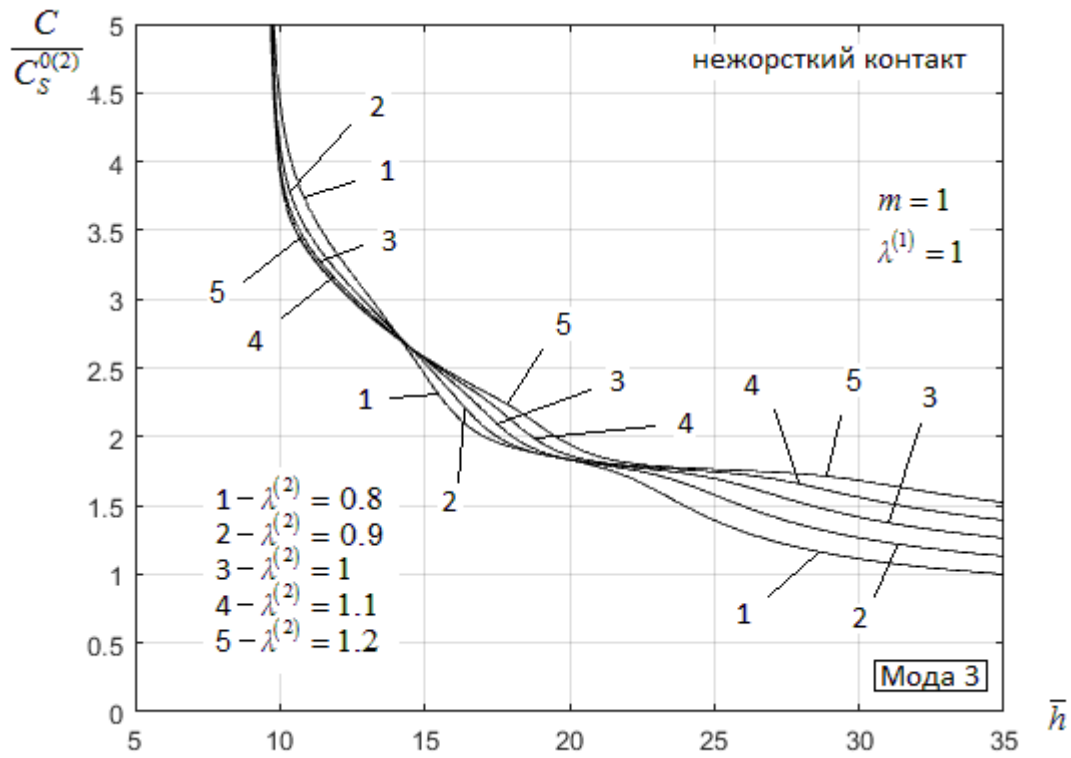


Рис. 4.14

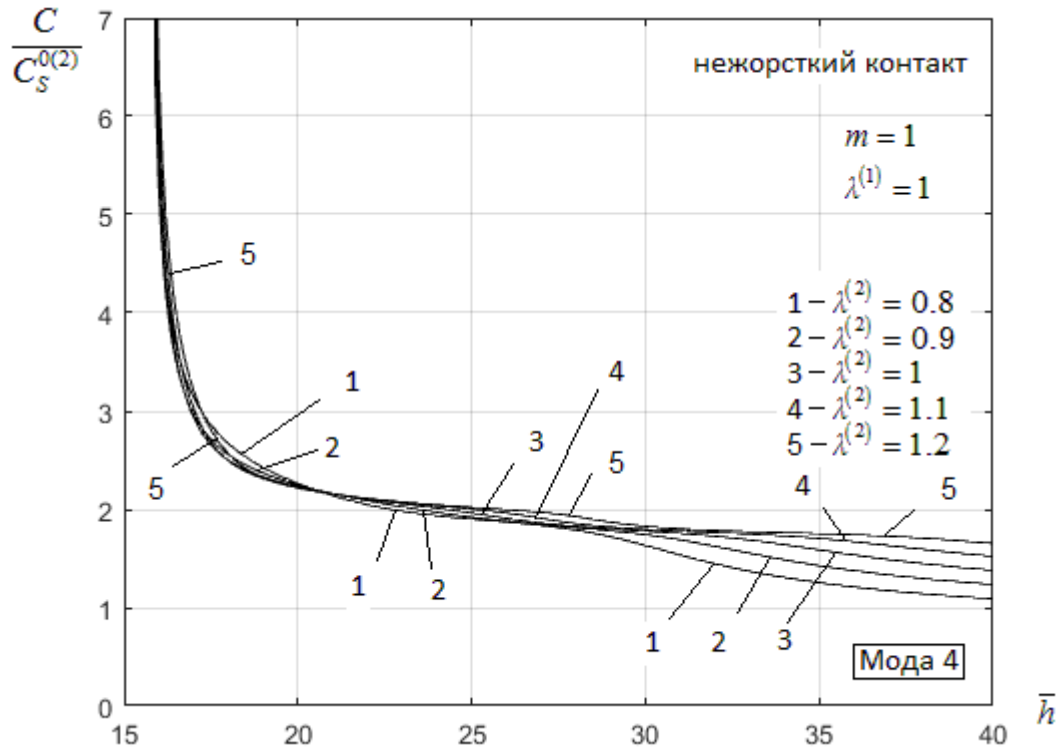


Рис. 4.15

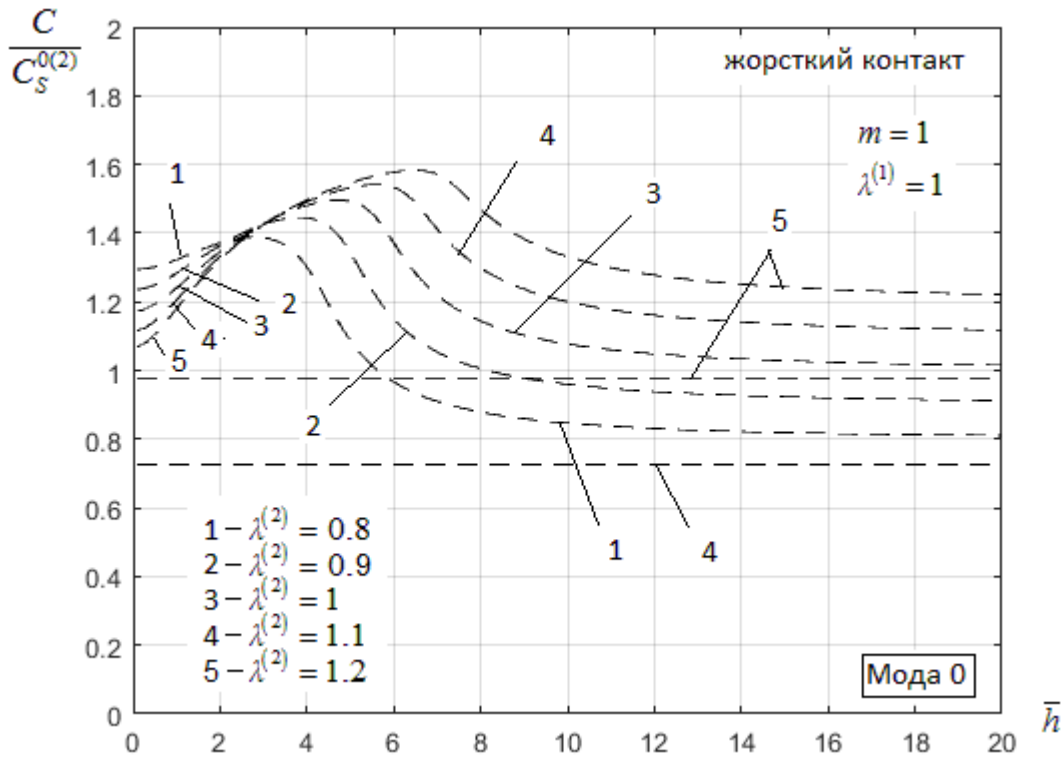


Рис. 4.16

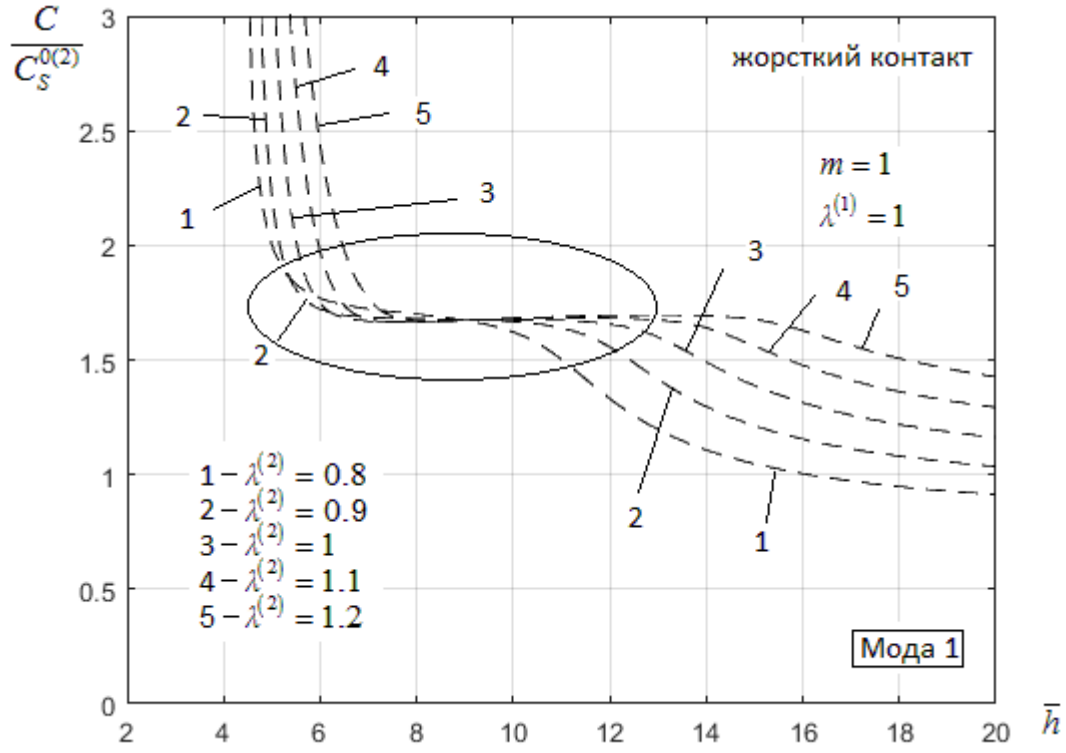


Рис. 4.17

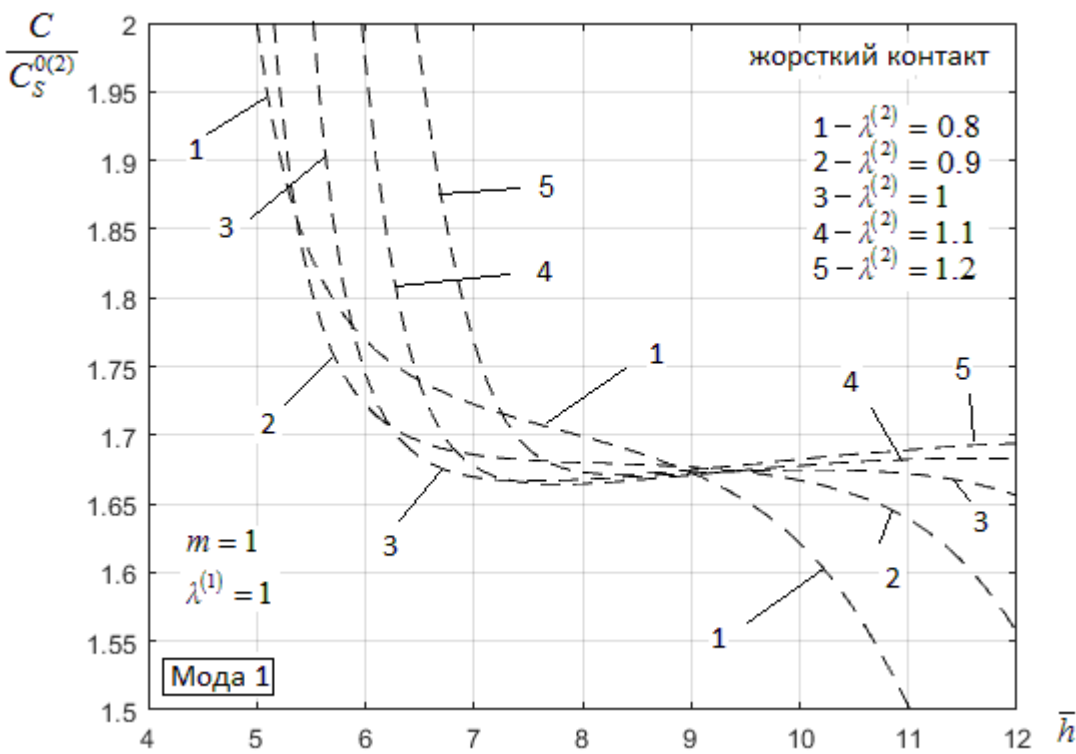


Рис. 4.17а

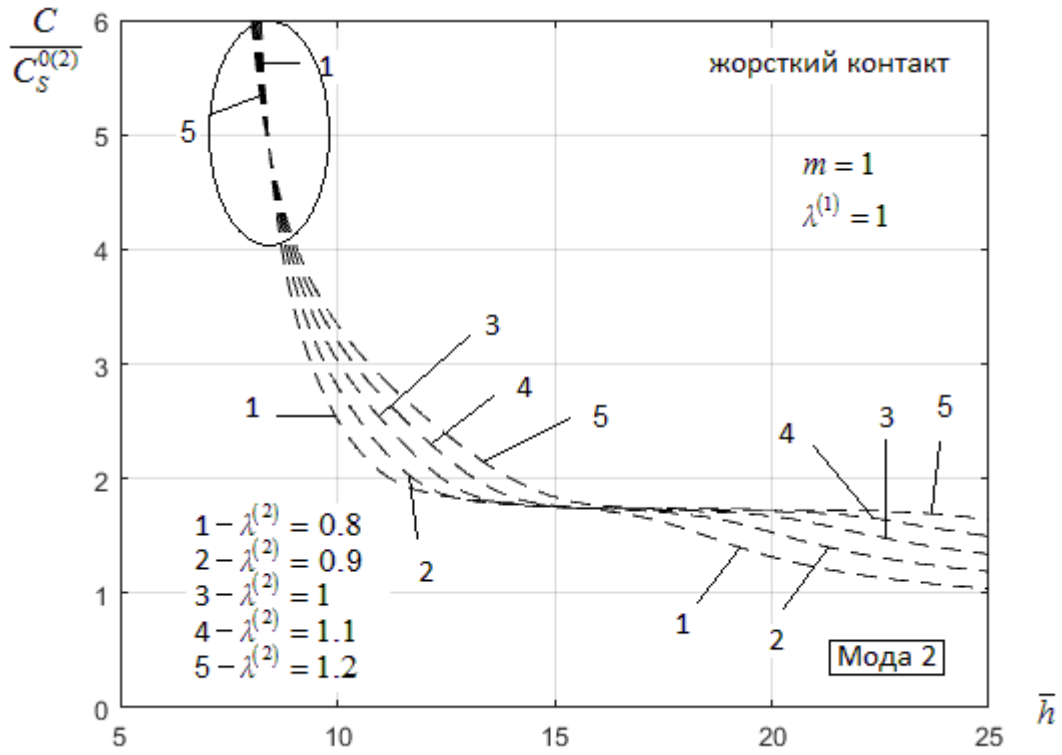


Рис. 4.18

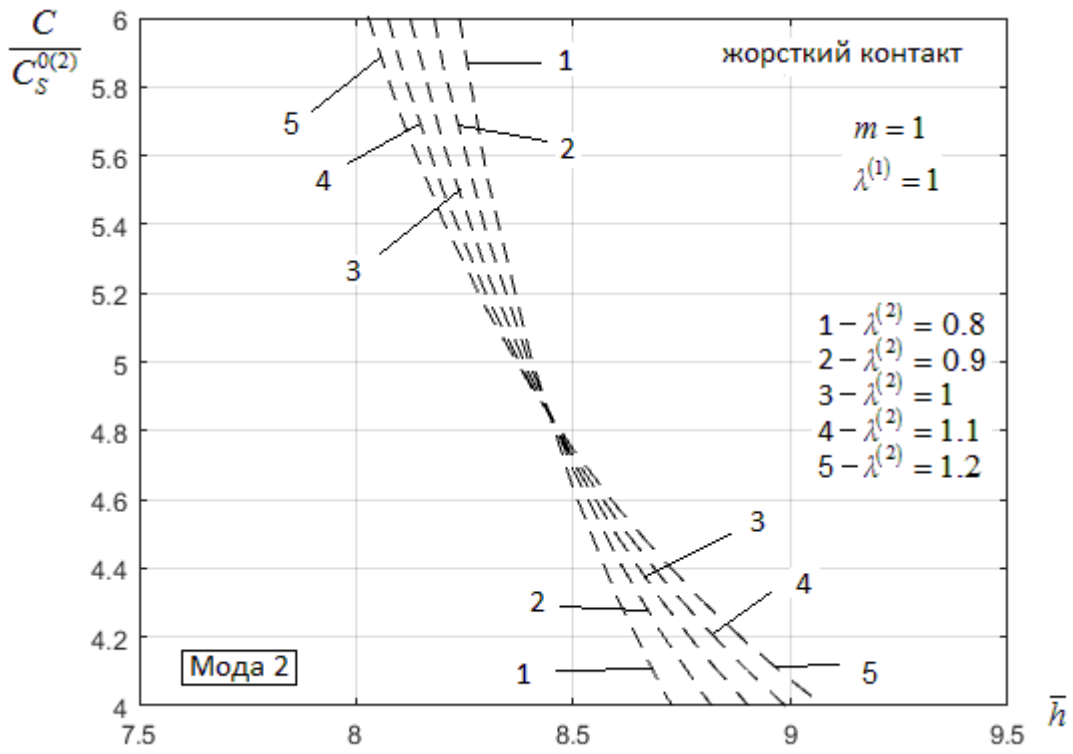


Рис. 4.18а

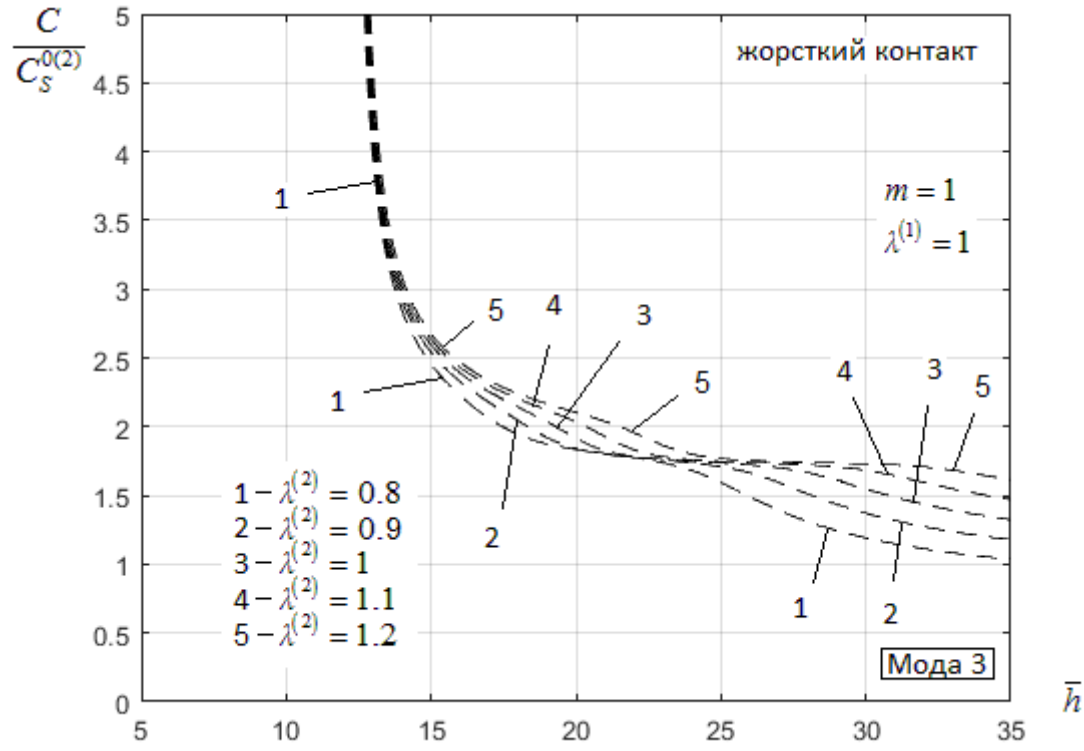


Рис. 4.19

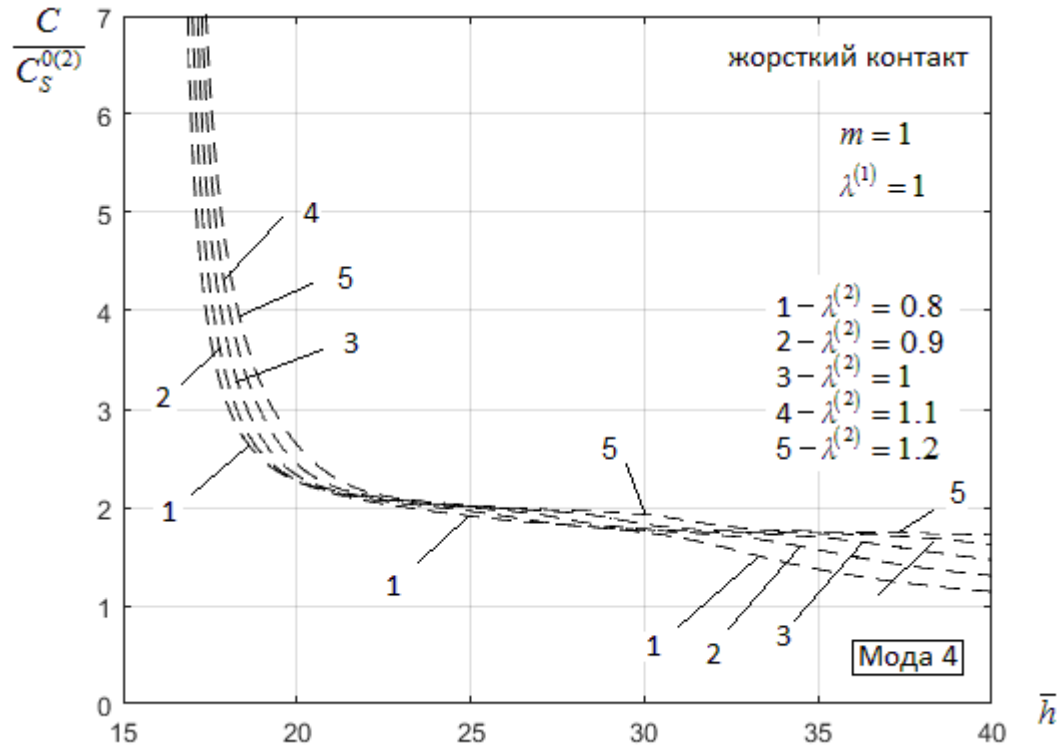


Рис. 4.20

Відзначимо, що при розтягуванні для розглянутих умов контакту між шарами композитного нестисливого матеріалу і початкового напруженого стану існують дві нульові моди (рис. 4.11, 4.16).

Для композитного матеріалу з початковими напруженнями на рис. 4.21 – 4.30 результати також показані у вигляді залежності відносної зміни фазової швидкості ζ від приведеної частоти $\bar{h}$.

Початкові напруження суттєво впливають на фазові швидкості вісесиметричних хвиль майже на всьому діапазоні частот.

Особливо значний вплив початкові напруження мають на фазову швидкість хвиль, що зароджуються.

Як правило, початкові напруження змінюють значення критичних частот.

Залежність фазової швидкості від початкових напружень для кожної моди визначається діапазоном частот.

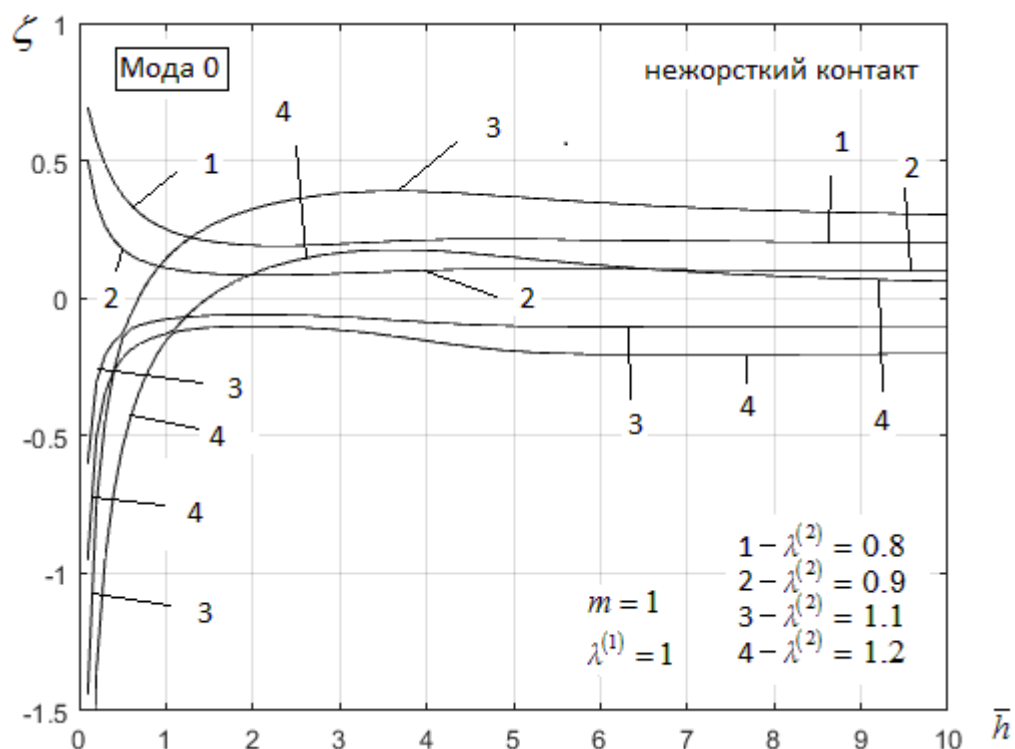


Рис. 4.21

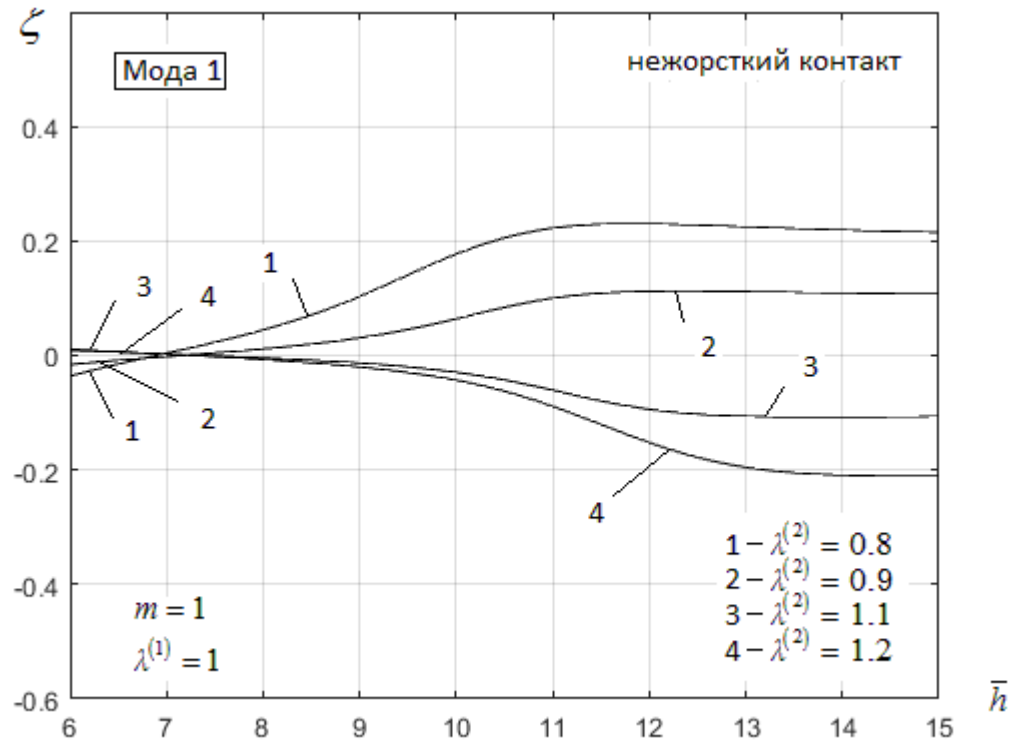


Рис. 4.22

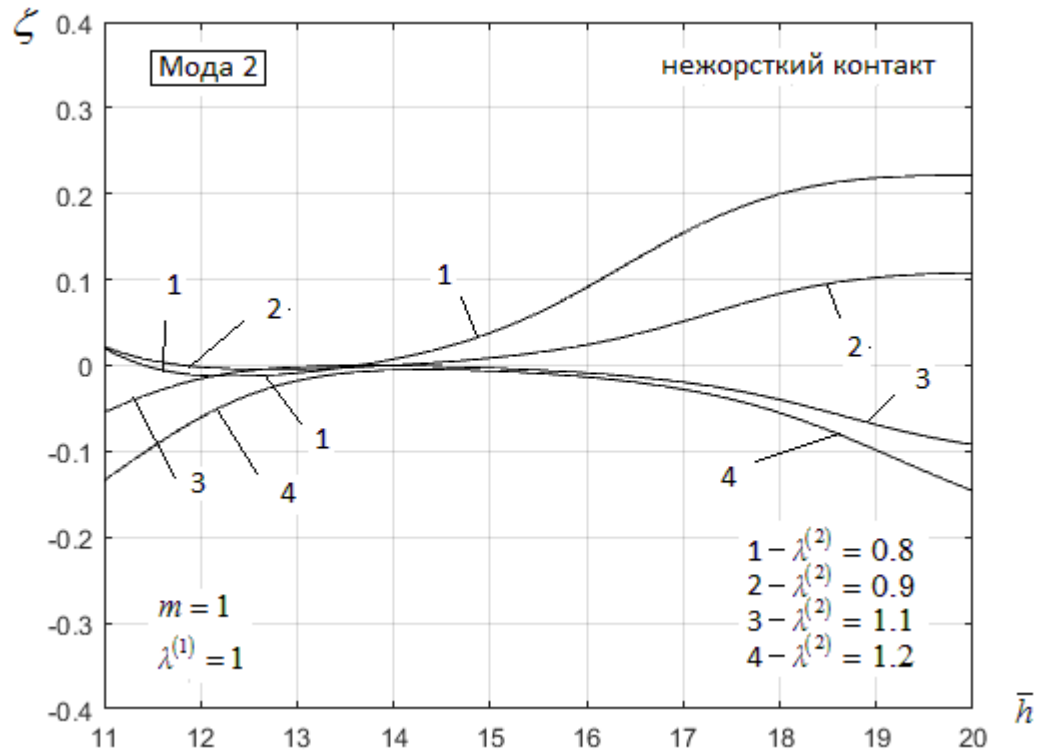


Рис. 4.23

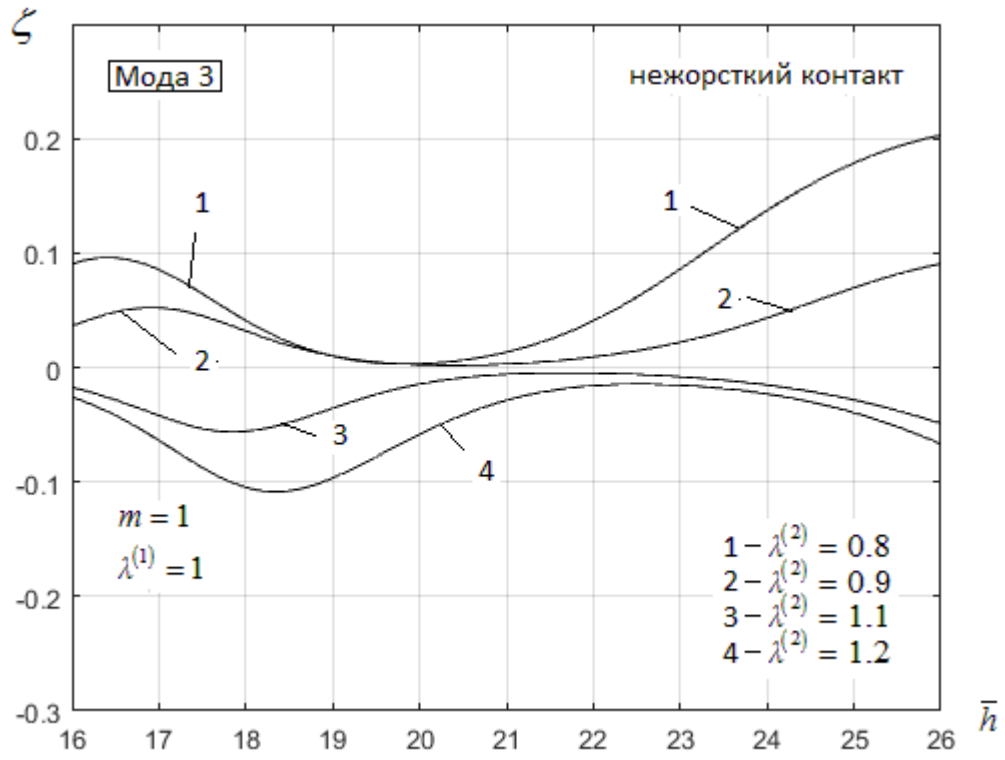


Рис. 4.24

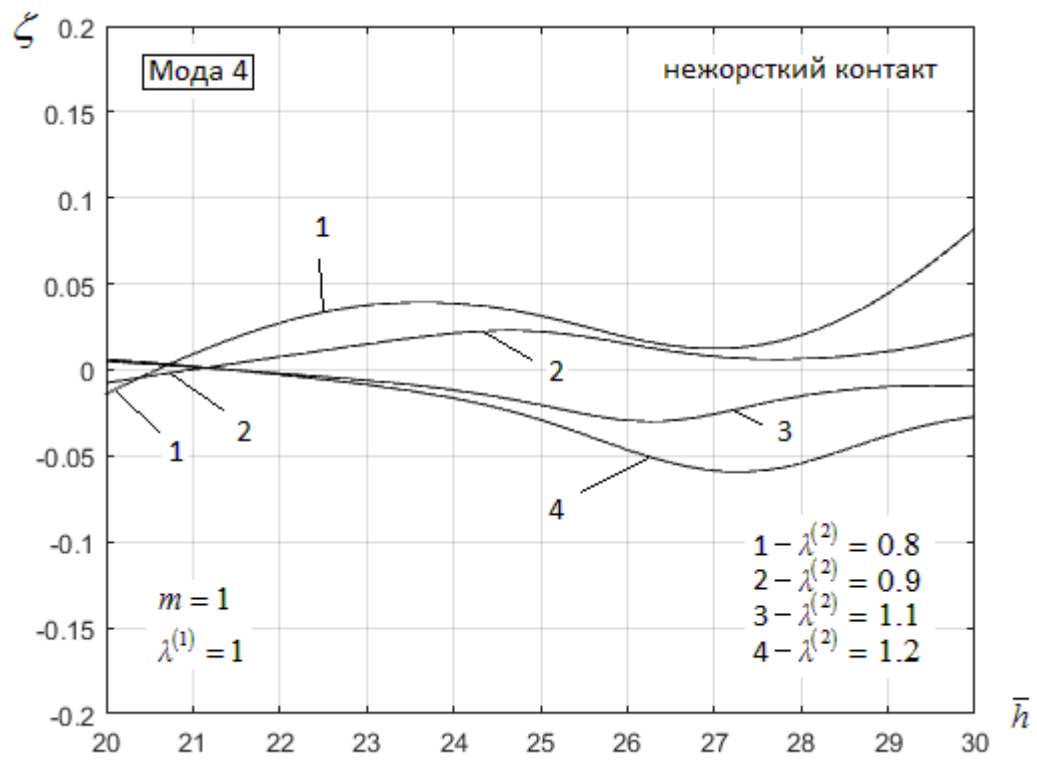


Рис. 4.25

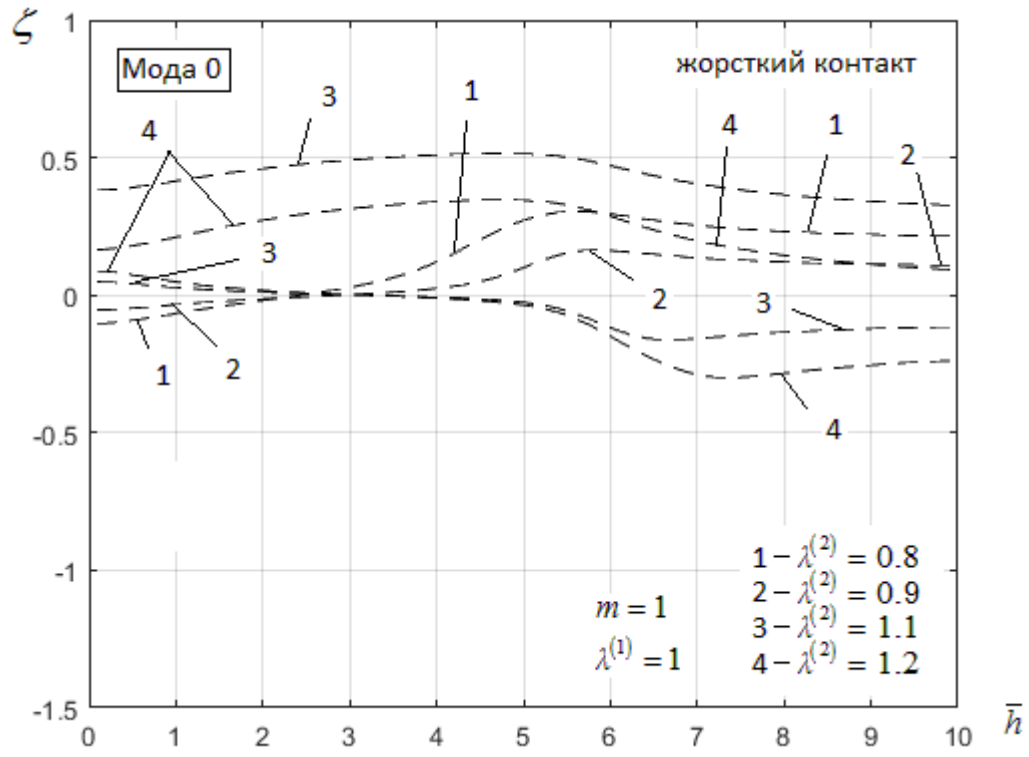


Рис. 4.26

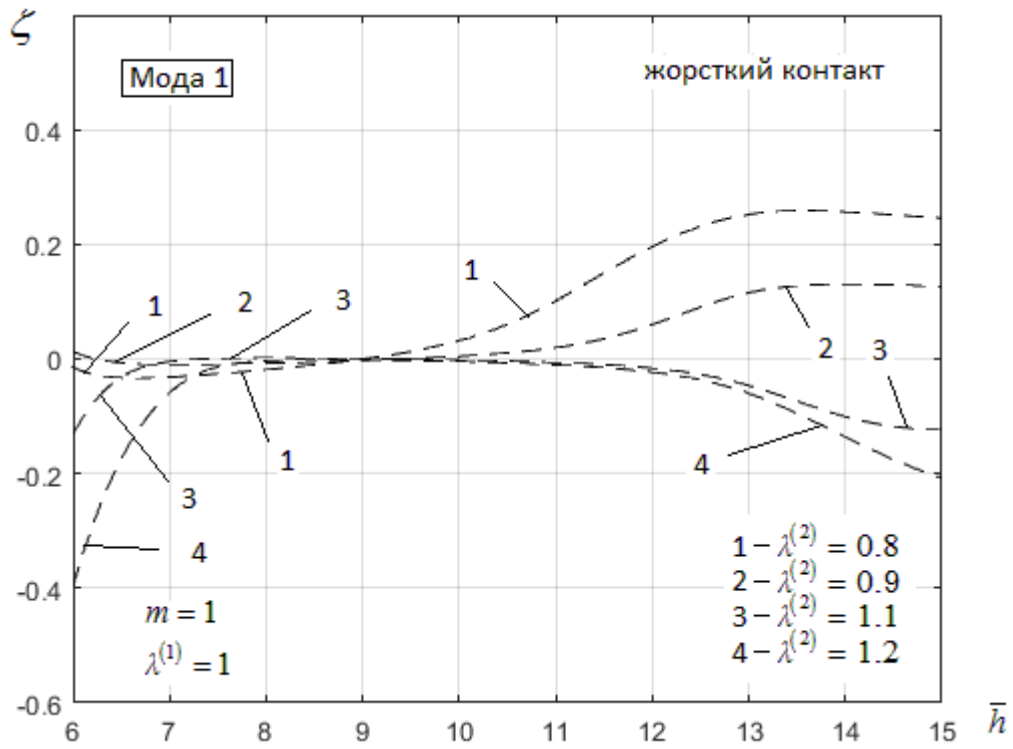


Рис. 4.27

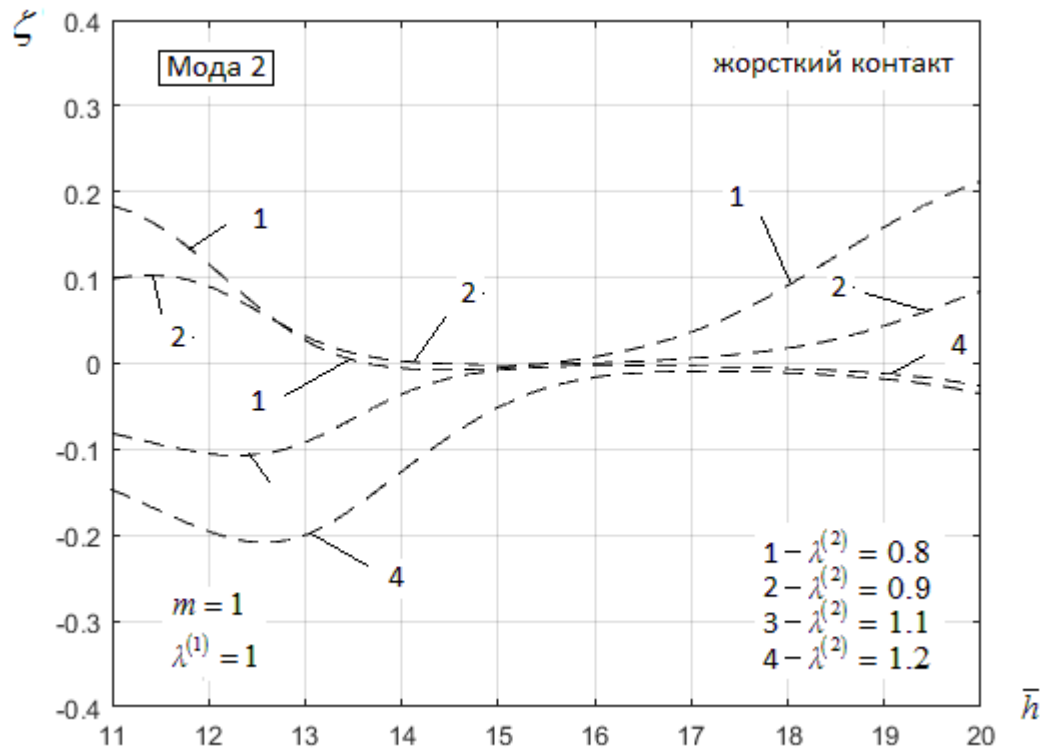


Рис. 4.28

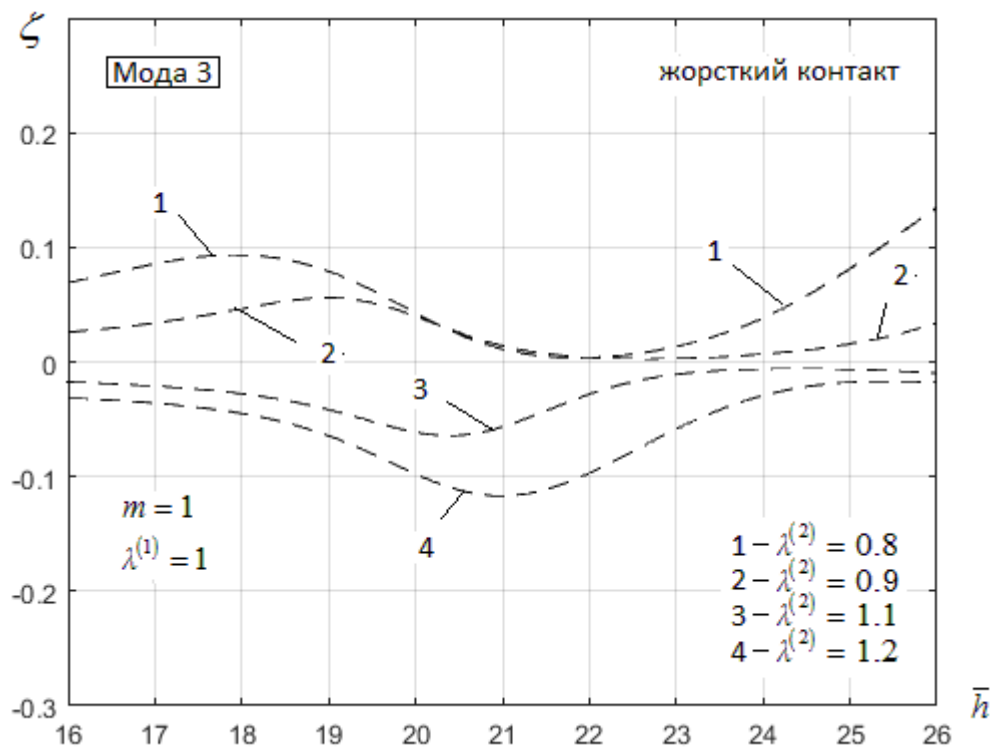


Рис. 4.29

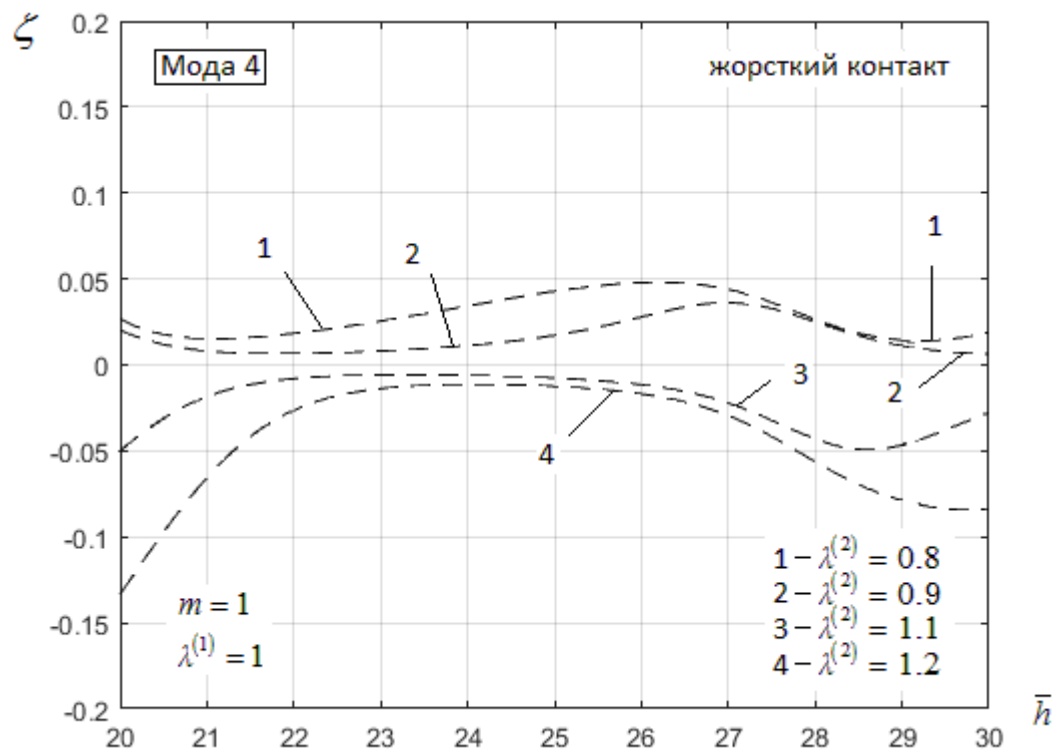


Рис. 4.30

Існують частоти, при яких початкові напруження не суттєво впливають (або взагалі не впливають) на значення фазової швидкості.

Для розглянутого варіанту початкового стану фазова швидкість значно більше реагує на розтягнення другого шару, ніж на стискання.

На рис. 4.31 – 4.42 показані залежності фазової швидкості квазіпоперечної хвилі від приведеної частоти при різних умовах контакту між шарами композиту і різних значеннях параметра шаруватості.

Рис. 4.31 – 4.36 відповідають контакту з повним проковзуванням (нежорсткому контакту), а рис. 4.37 – 4.42 – повному (жорсткому) контакту між шарами композитного матеріалу. Розглядаємо початковий напружений стан $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = 1$. Суцільні лінії на рис. 4.31 – 4.42 відповідають значенню $m = 1$, штрихові лінії – значенню $m = 0.5$, а штрих-пунктирні лінії – значенню $m = 0.25$.

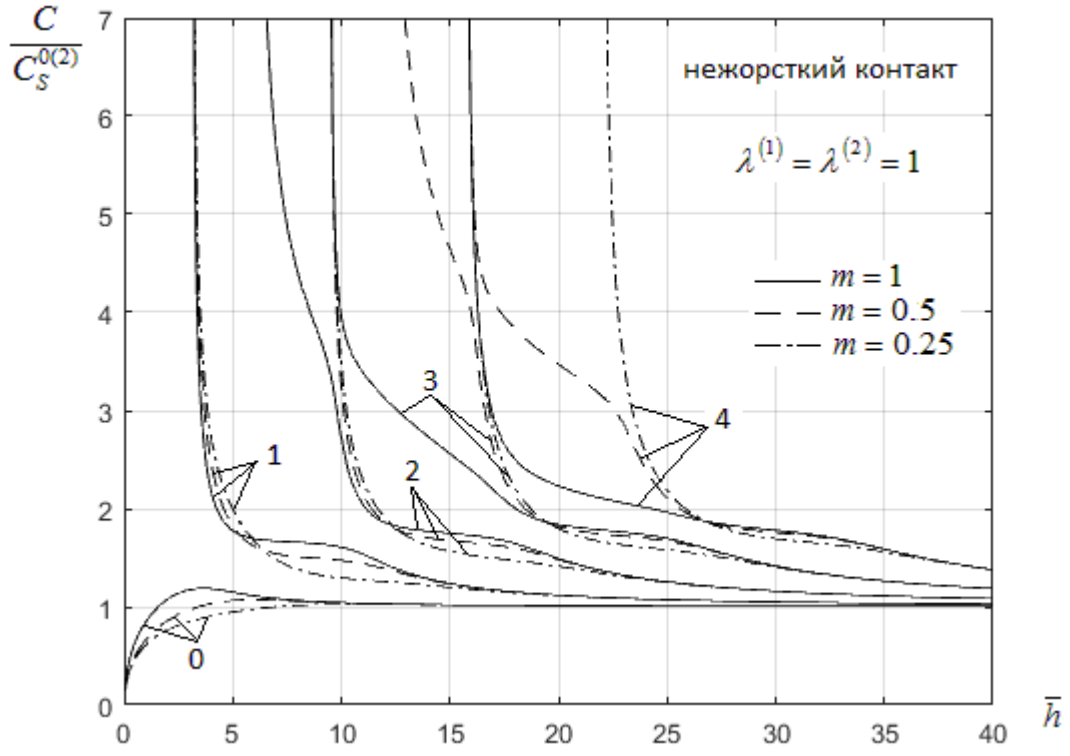


Рис. 4.31

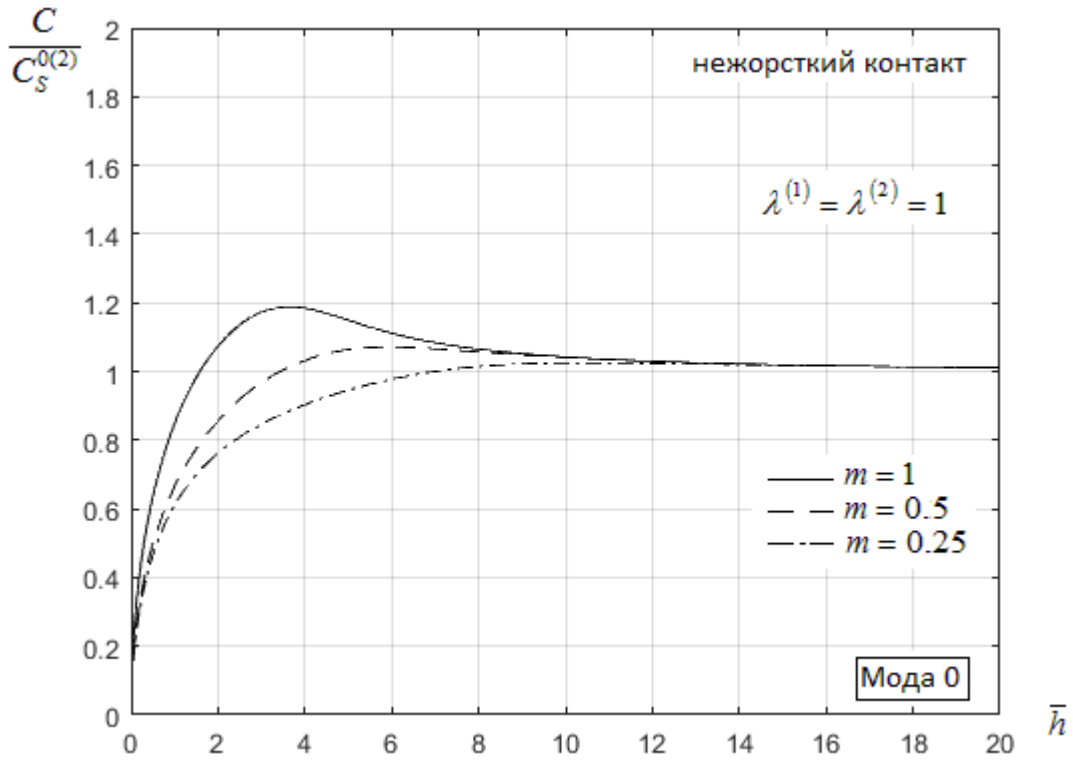


Рис. 4.32

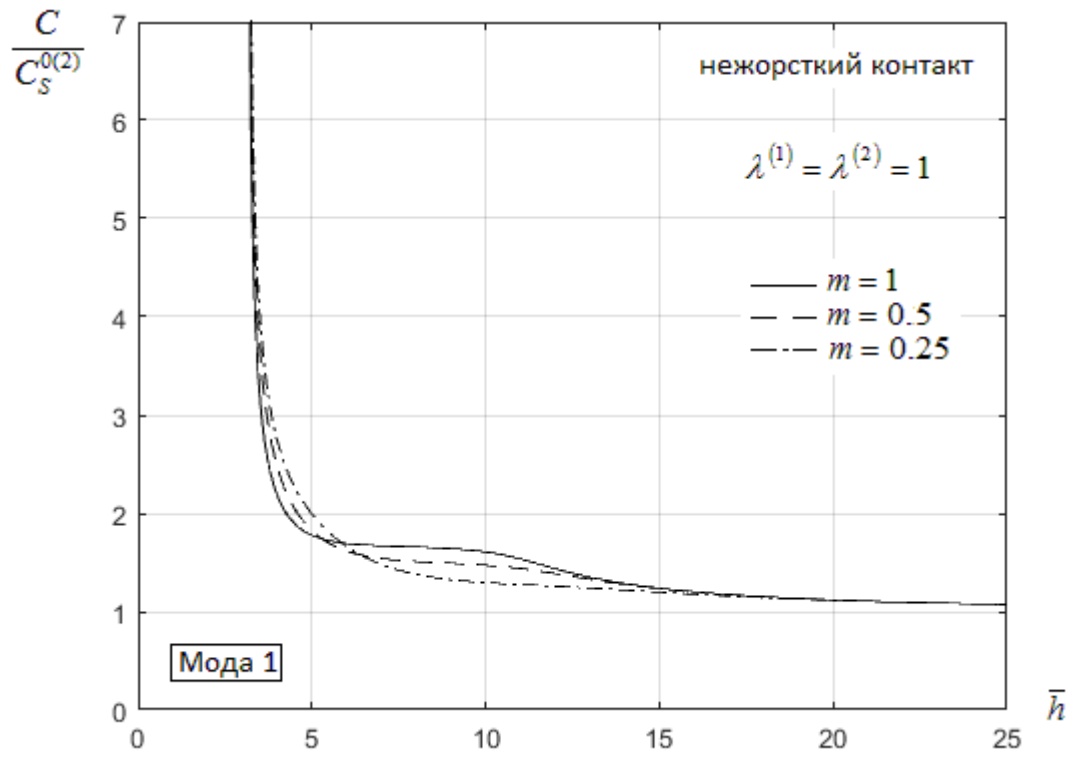


Рис. 4.33

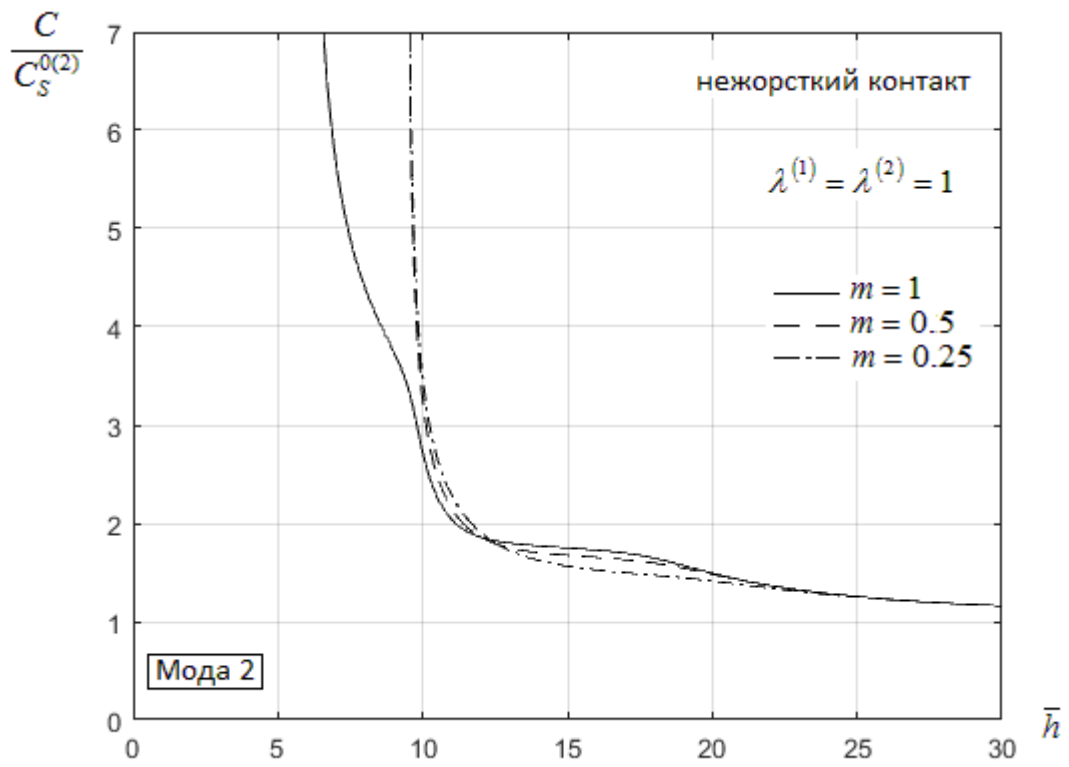


Рис. 4.34

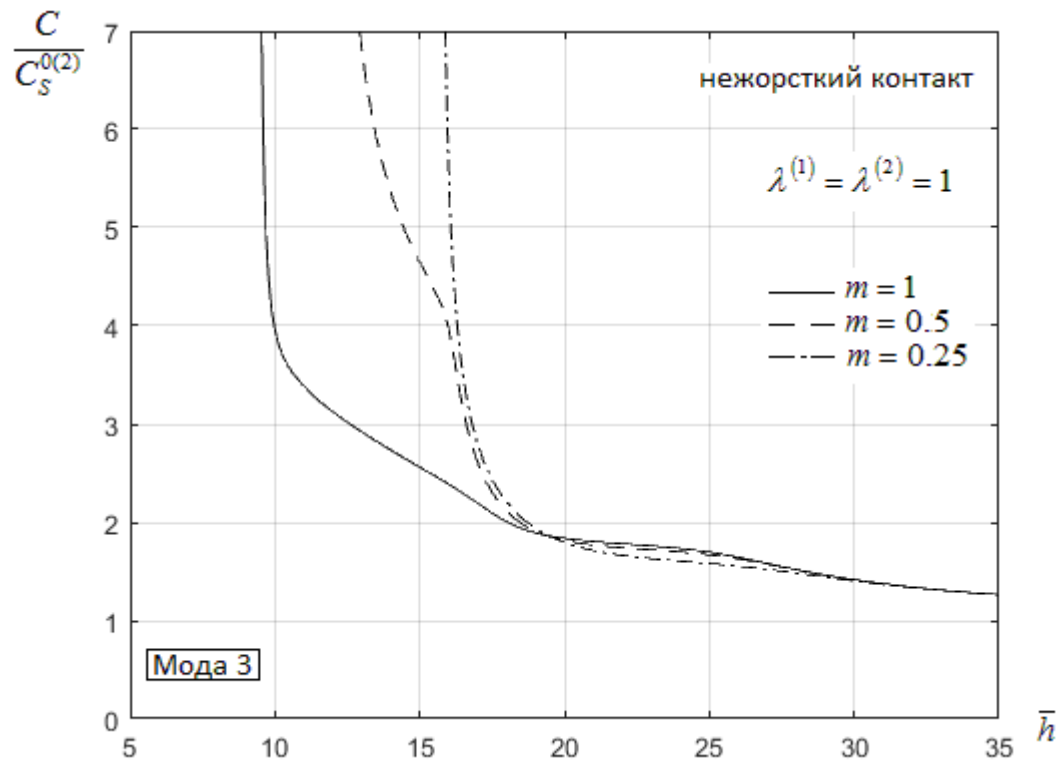


Рис. 4.35

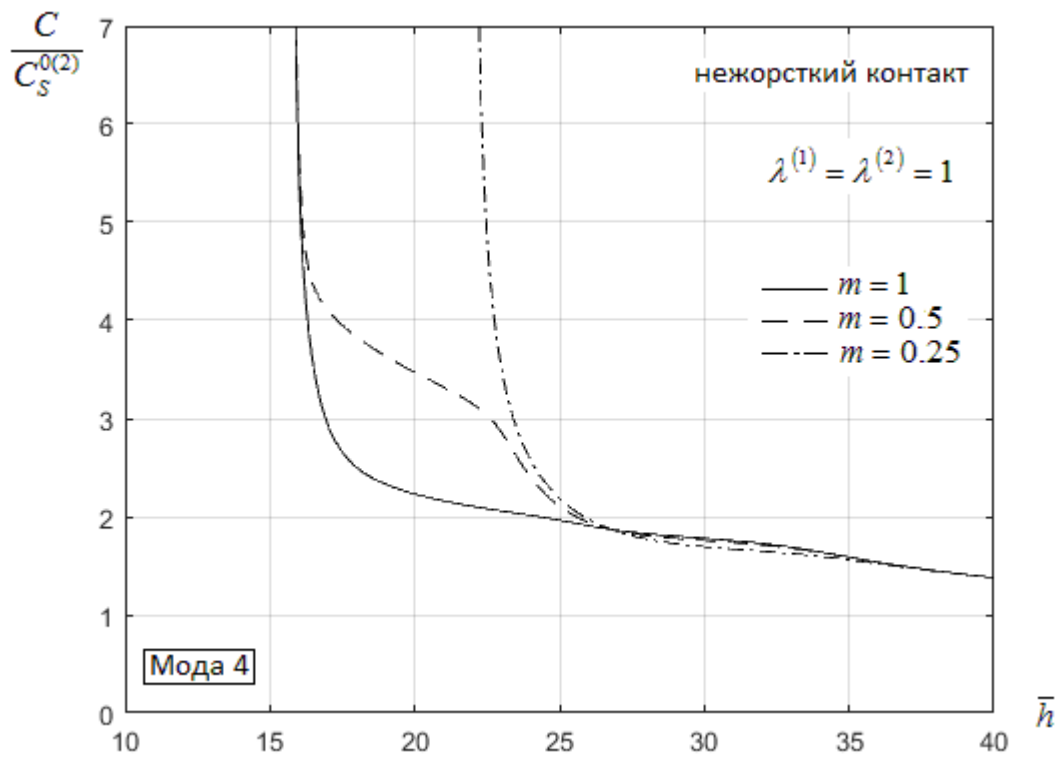


Рис. 4.36

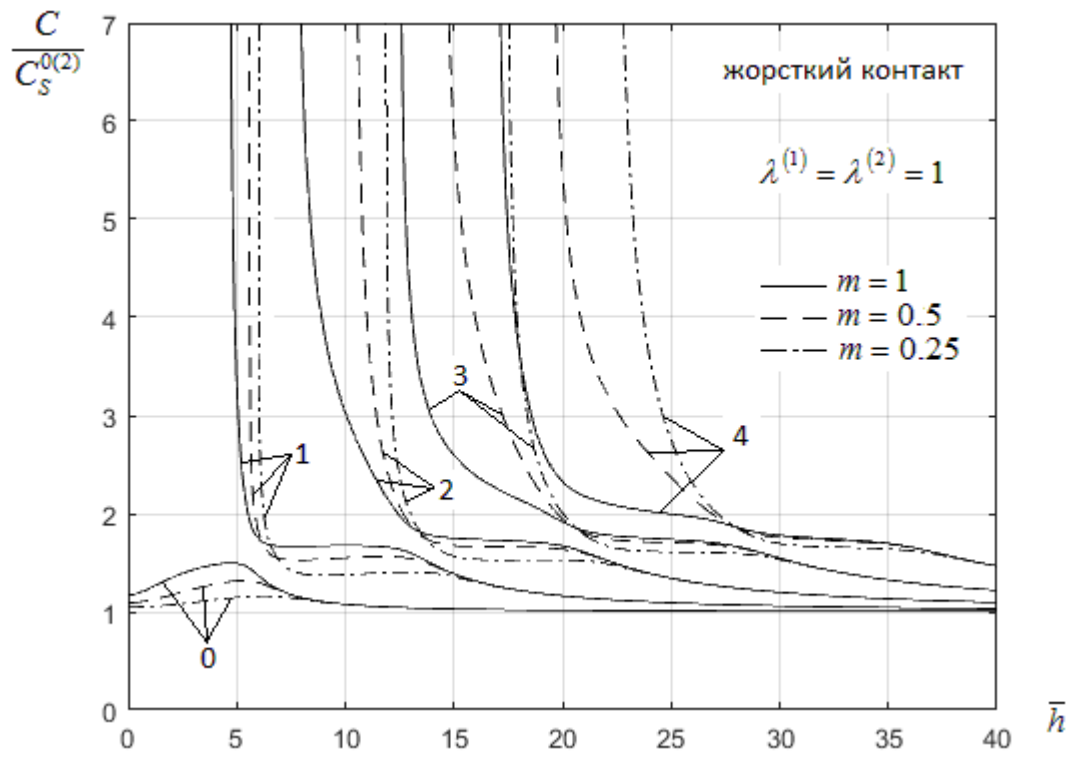


Рис. 4.37

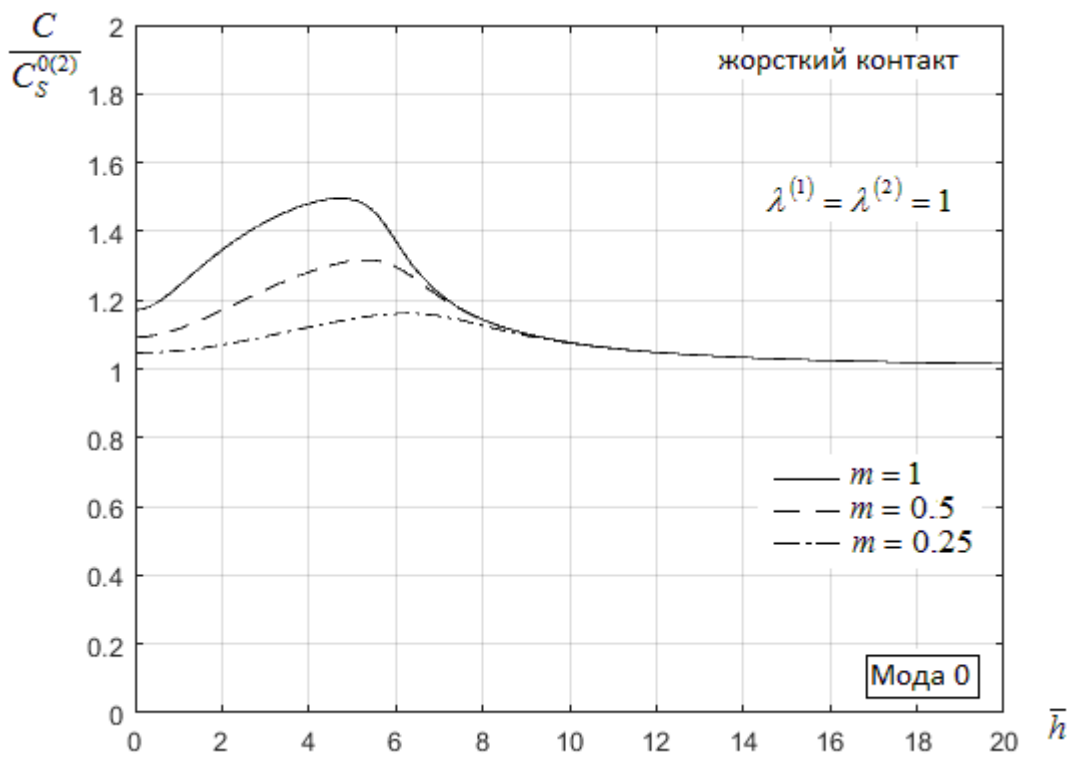


Рис. 4.38

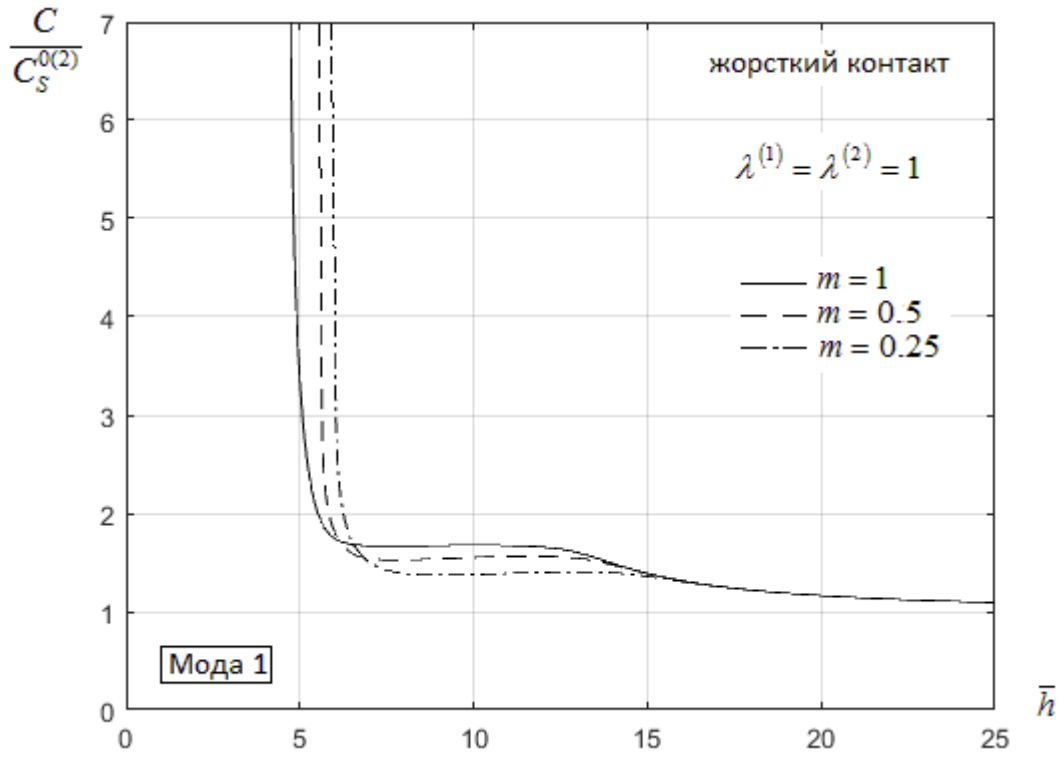


Рис. 4.39

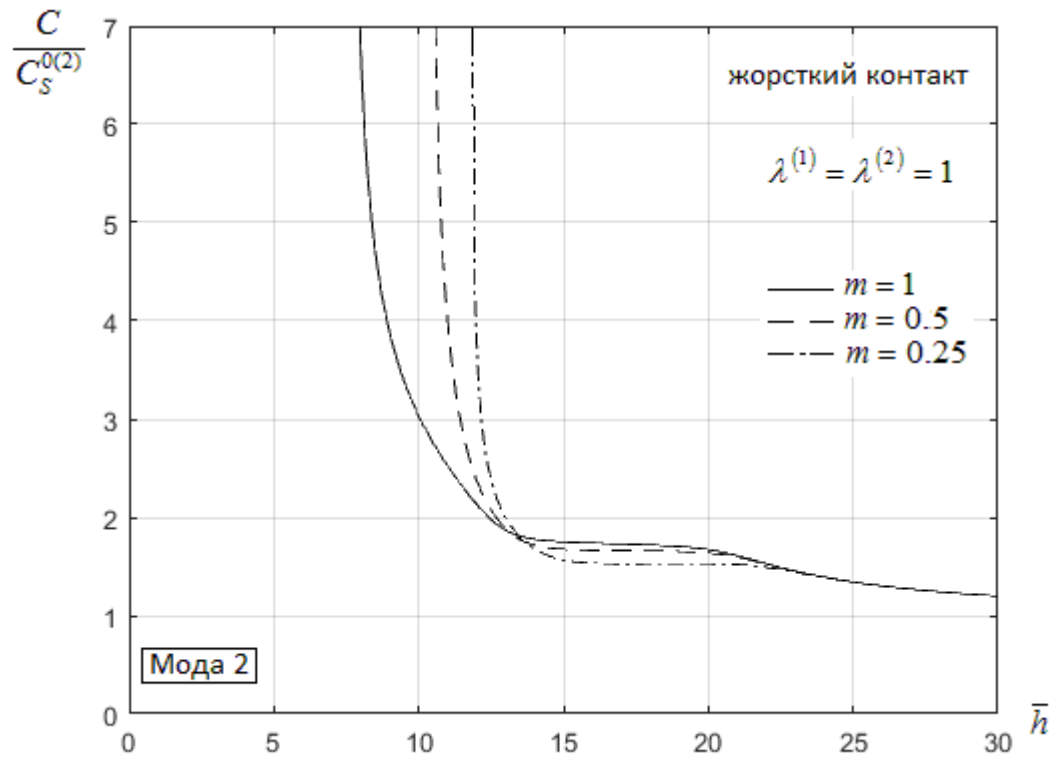


Рис. 4.40

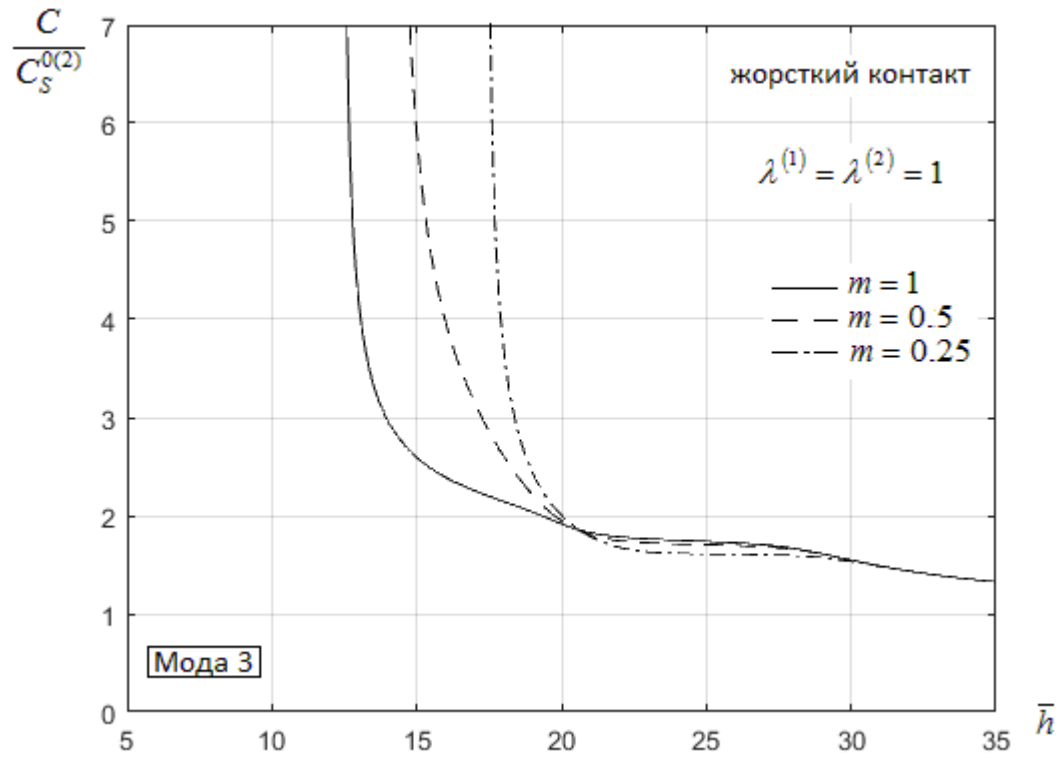


Рис. 4.41

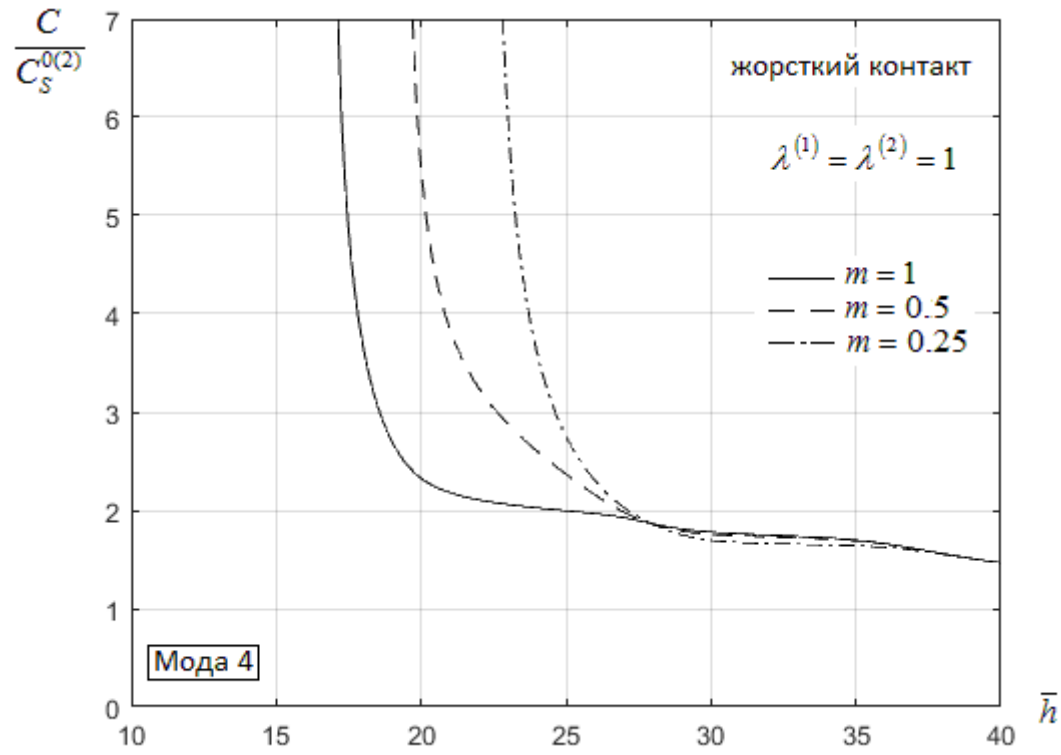


Рис. 4.42

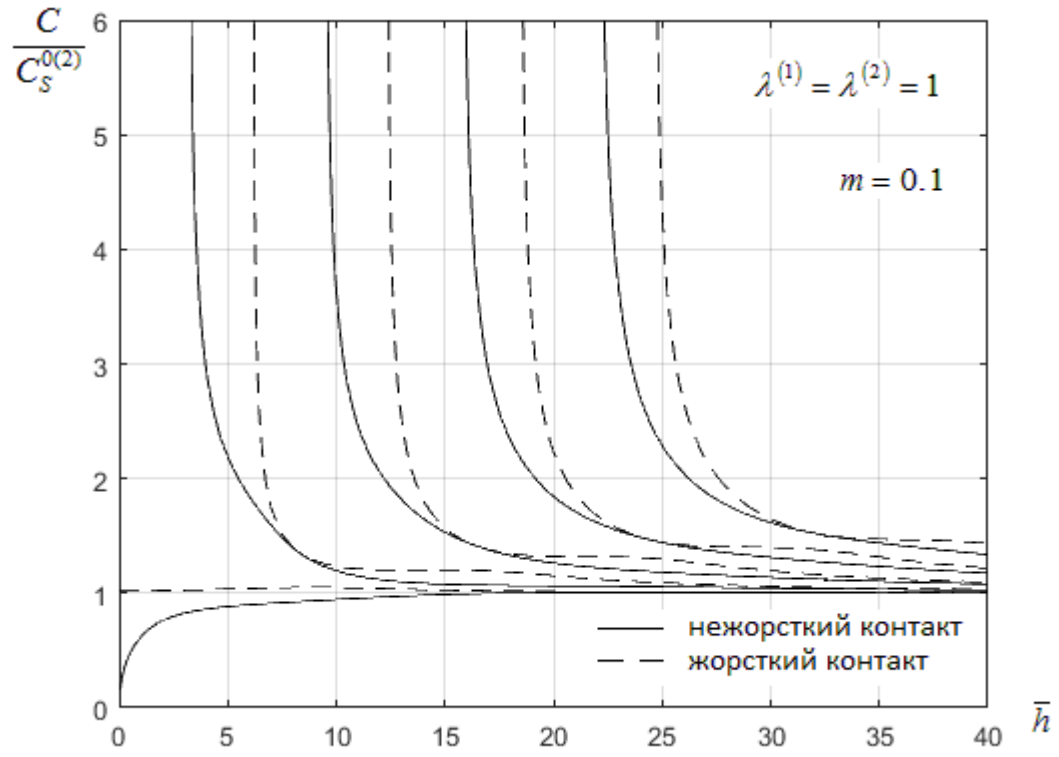


Рис. 4.43

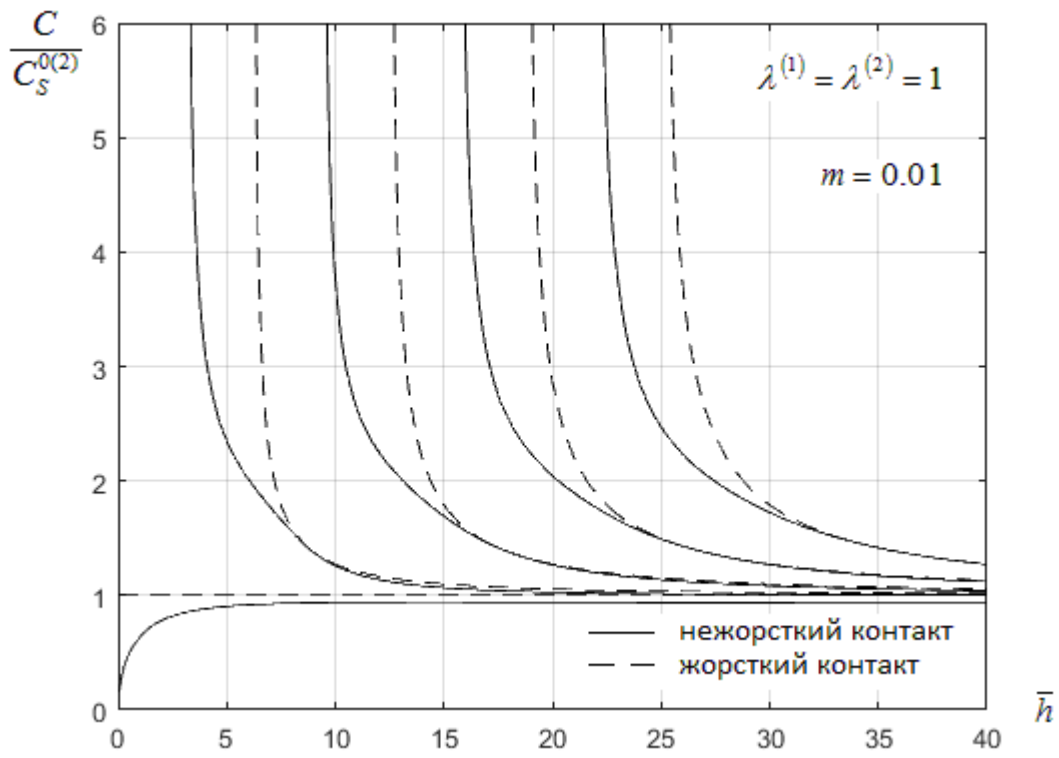


Рис. 4.44

Для різних діапазонів частот залежність між фазовою швидкістю і параметром шаруватості може бути різною.

Існують частоти, при яких параметр шаруватості не впливає на значення фазової швидкості.

Параметр шаруватості значно впливає на значення критичних частот.

Параметр шаруватості має більше значення для повного контакту між шарами композитного матеріалу.

При зміні відношення товщини шарів змінюються як критичні частоти, так і характер залежності фазової швидкості від частоти і від початкових напружень.

Залежність фазової швидкості від параметра шаруватості для кожної моди визначається діапазоном частот.

Кожна мода має діапазон частот, в якому зміна фазової швидкості істотно залежить від співвідношення товщини шарів композитного матеріалу.

Існують частоти, при яких товщина шарів композитного матеріалу не впливає на значення фазової швидкості.

При досягненні параметром шаруватості певного мінімального значення фазова швидкість змінюється несуттєво.

Проведена оцінка розв'язків дисперсійних рівнянь для різних пружних потенціалів: потенціала Трелоара і потенціала Бартенєва-Хазановича (рис. 4.45 – 4.46). Порівнювалися матеріали, які мають однакову швидкість зсувної хвилі в ненапруженому стані. Розглядався початковий напружений стан $\lambda_1^{(1)} = 1$; $\lambda_1^{(2)} = 0.8$. В ненапруженому початковому стані $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = 1$ дисперсійні криві для цих типів пружних потенціалів співпадають і мають вигляд, як на рис. 4.5 – 4.10.

На рис. 4.45 – 4.46 суцільні криві відповідають дисперсійним кривим для пружного потенціалу Трелоара, а пунктирні – для потенціалу Бартенєва-Хазановича.

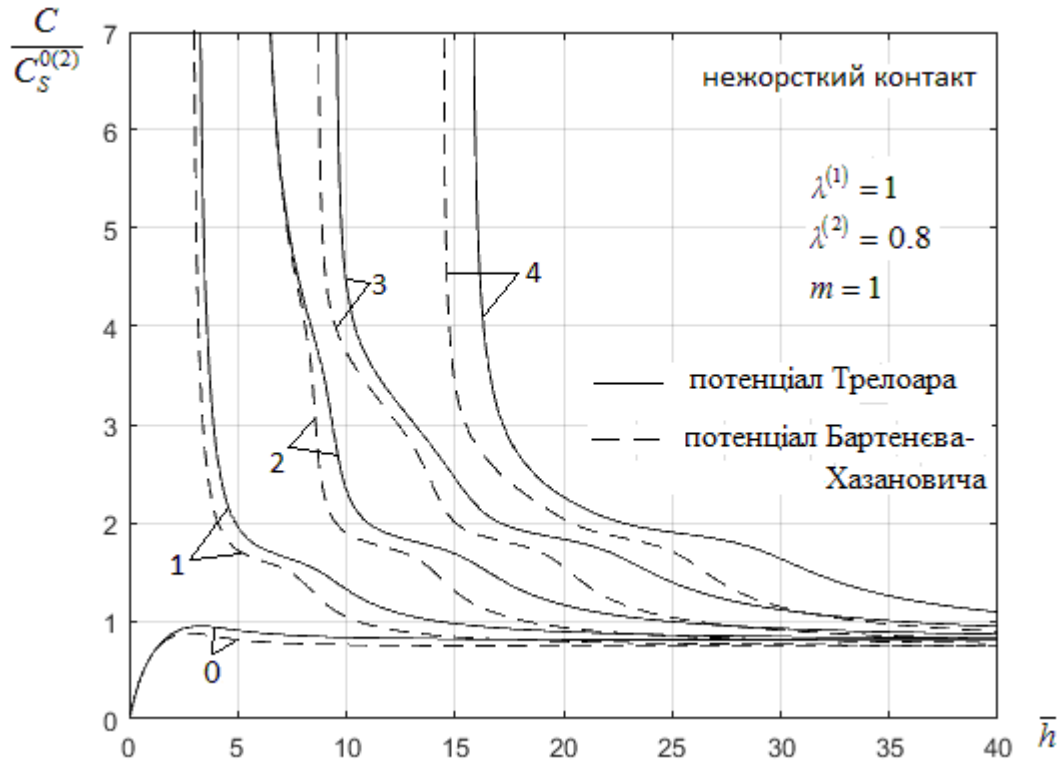


Рис. 4.45

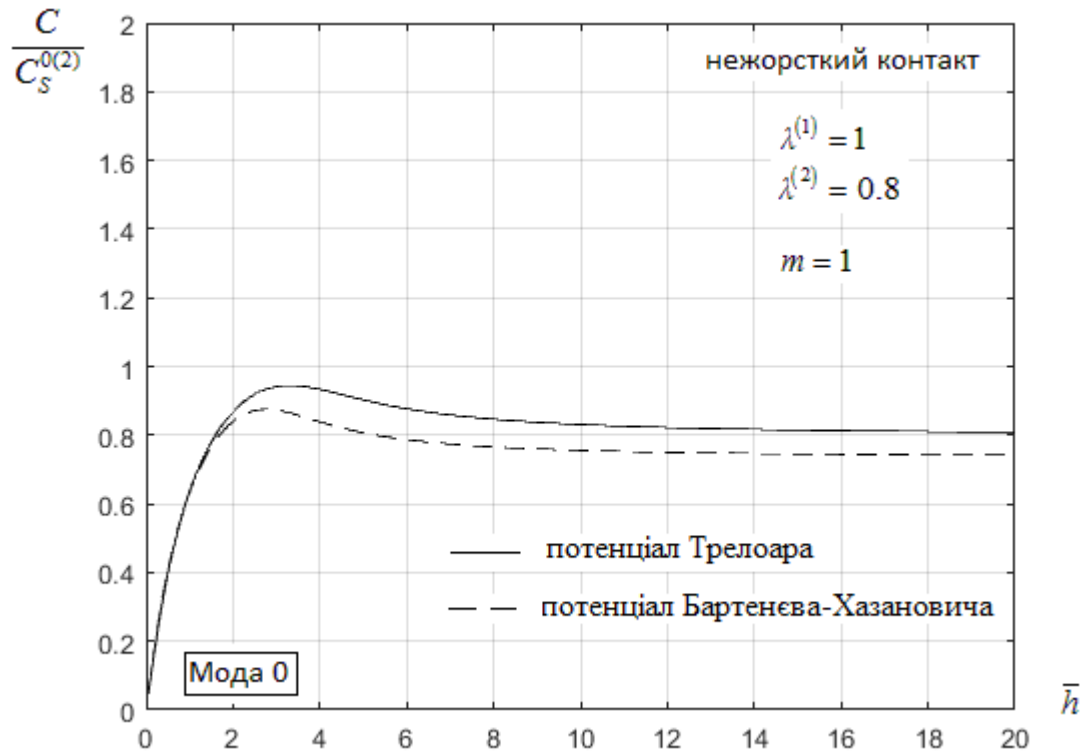


Рис. 4.46

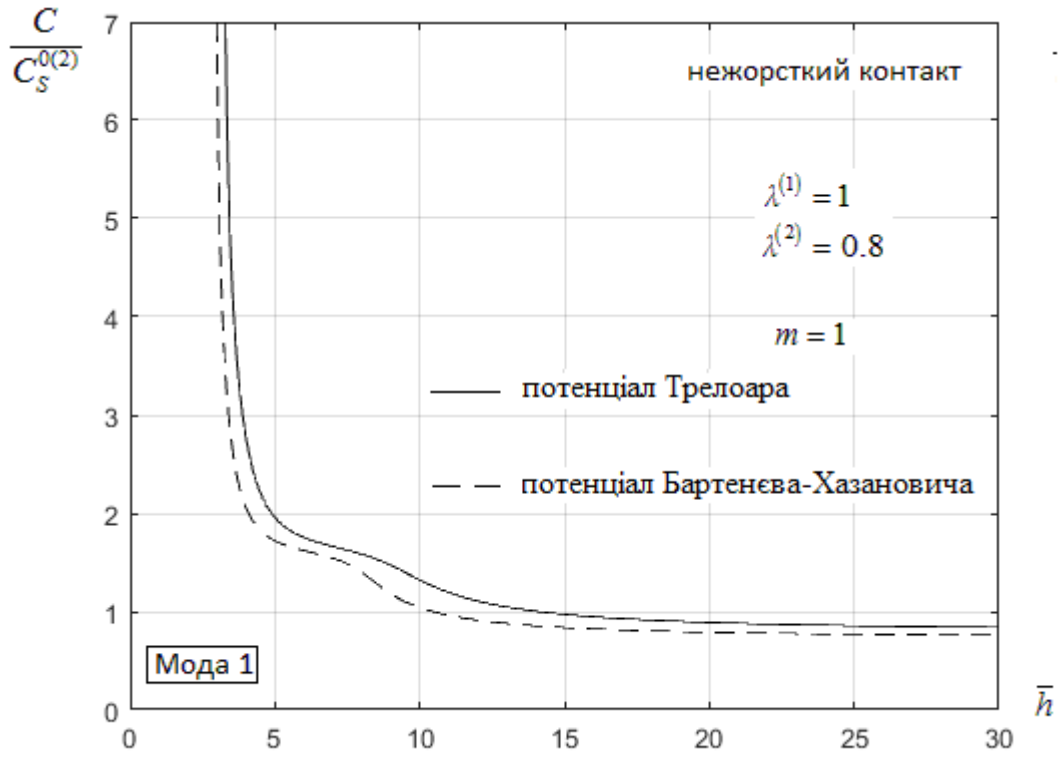


Рис. 4.47

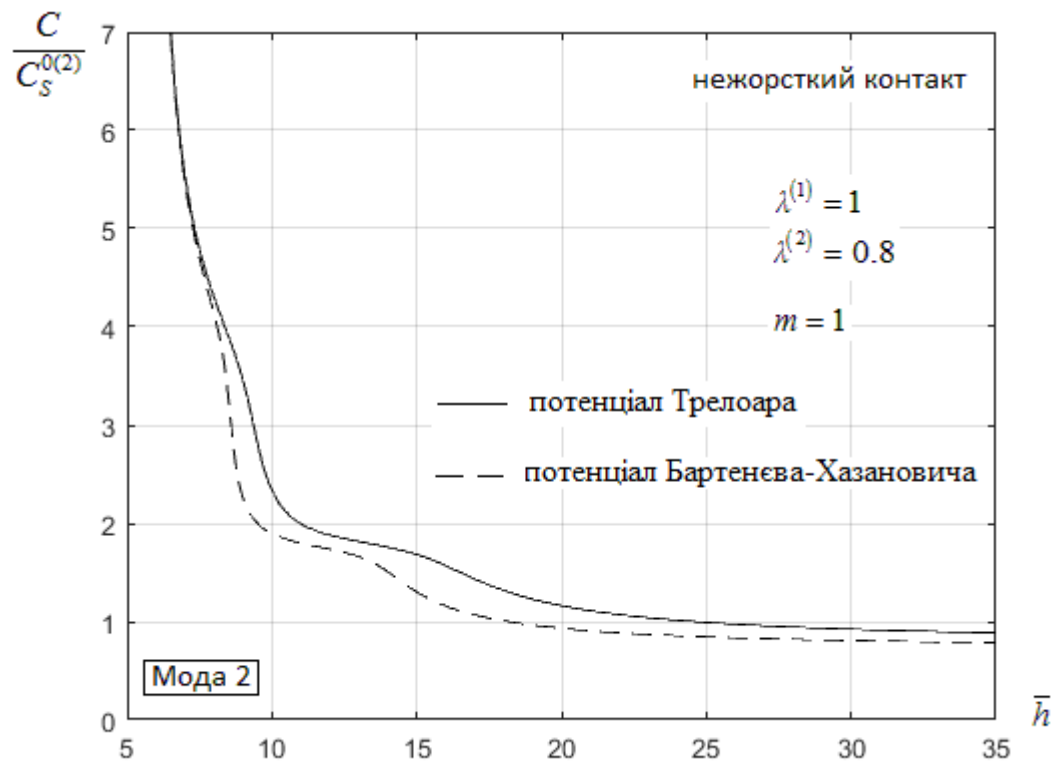


Рис. 4.48

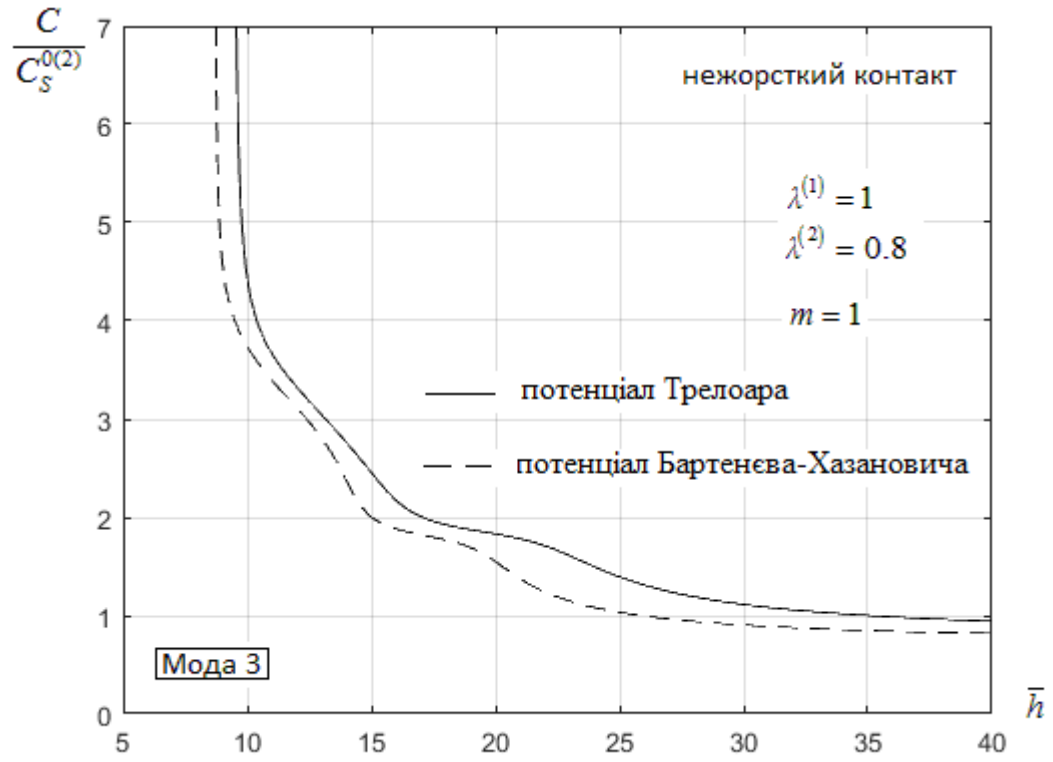


Рис. 4.49

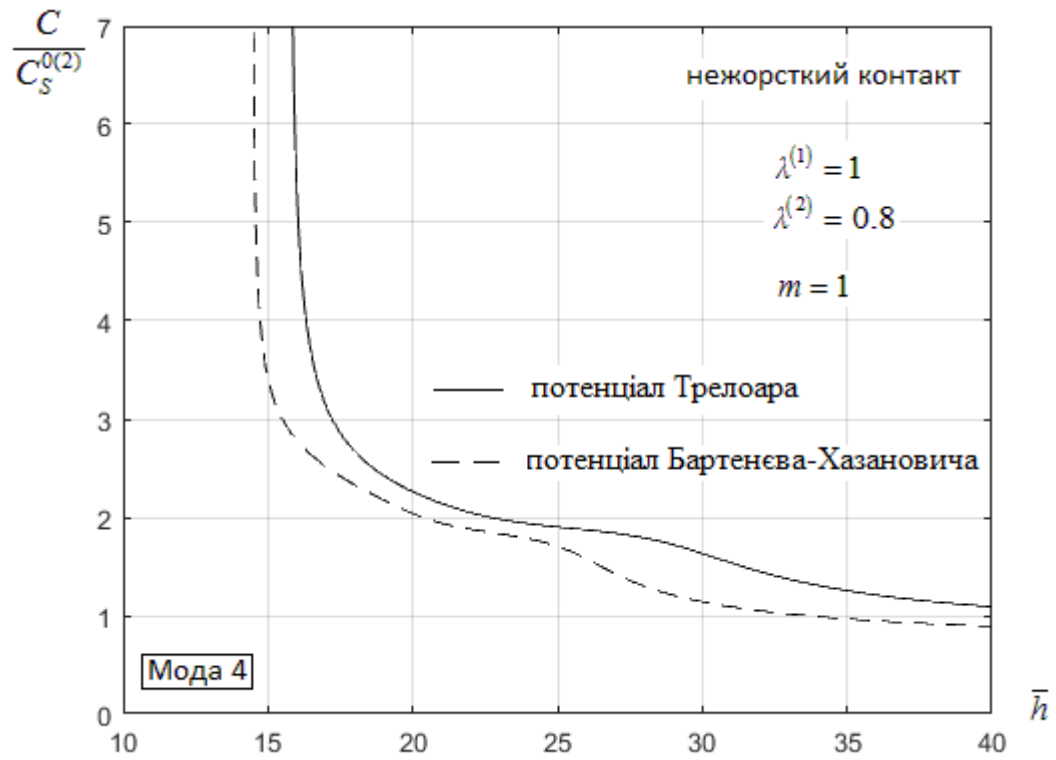


Рис. 4.50

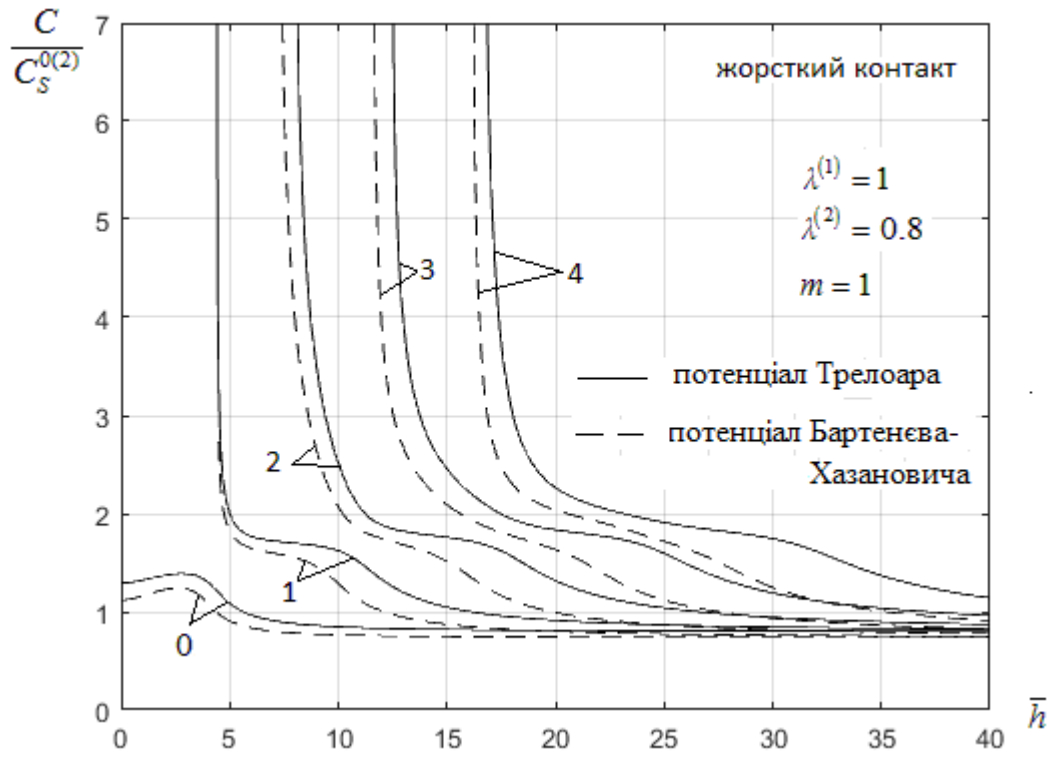


Рис. 4.51

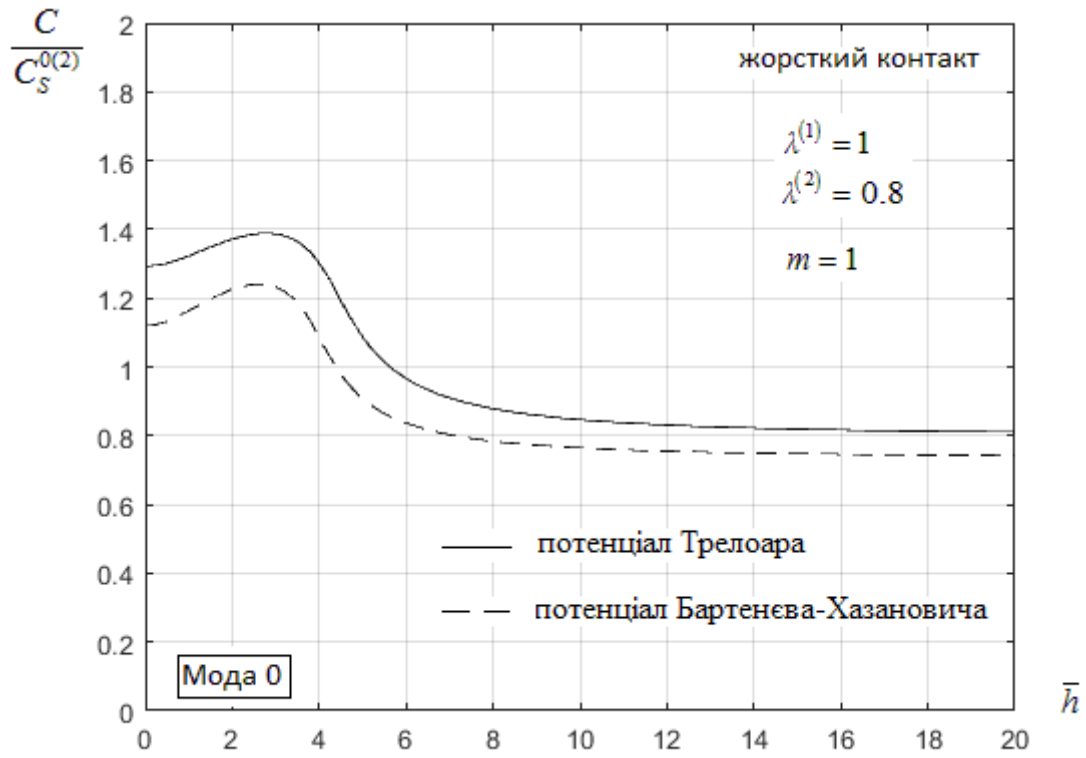


Рис. 4.52

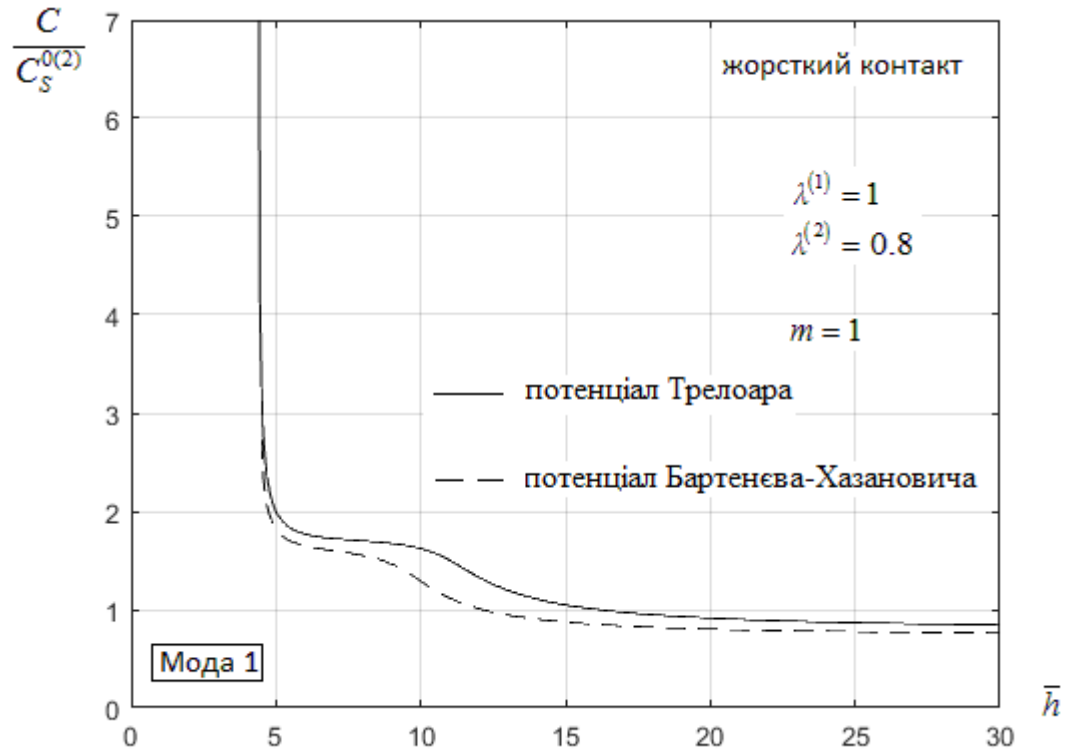


Рис. 4.53

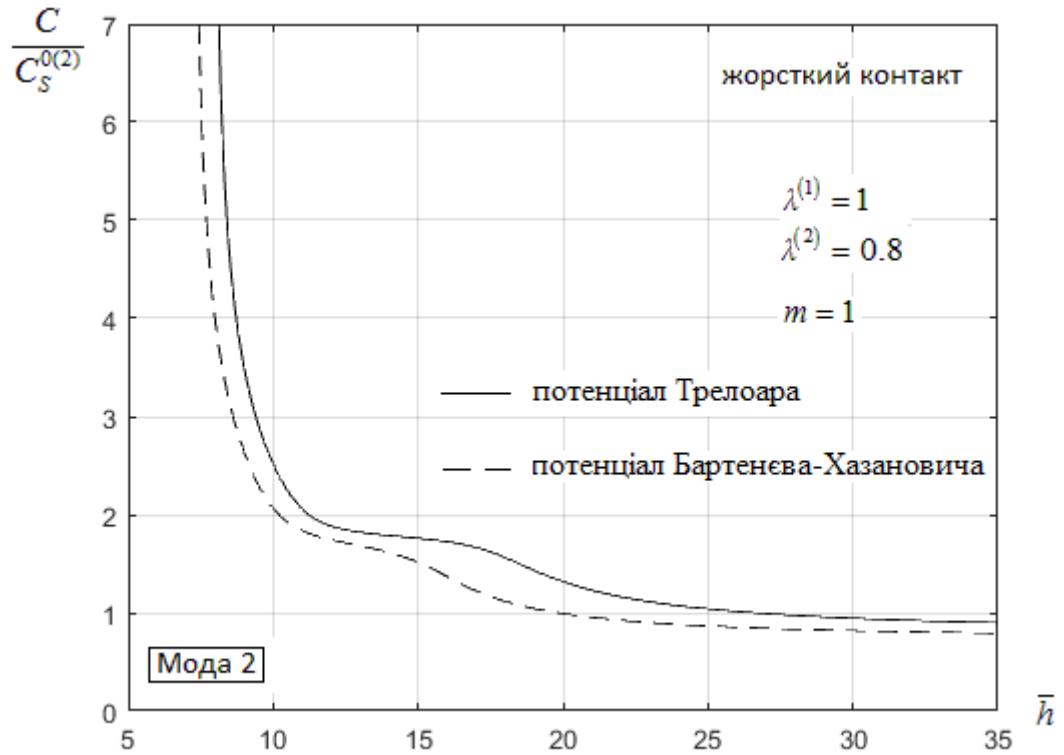


Рис. 4.54

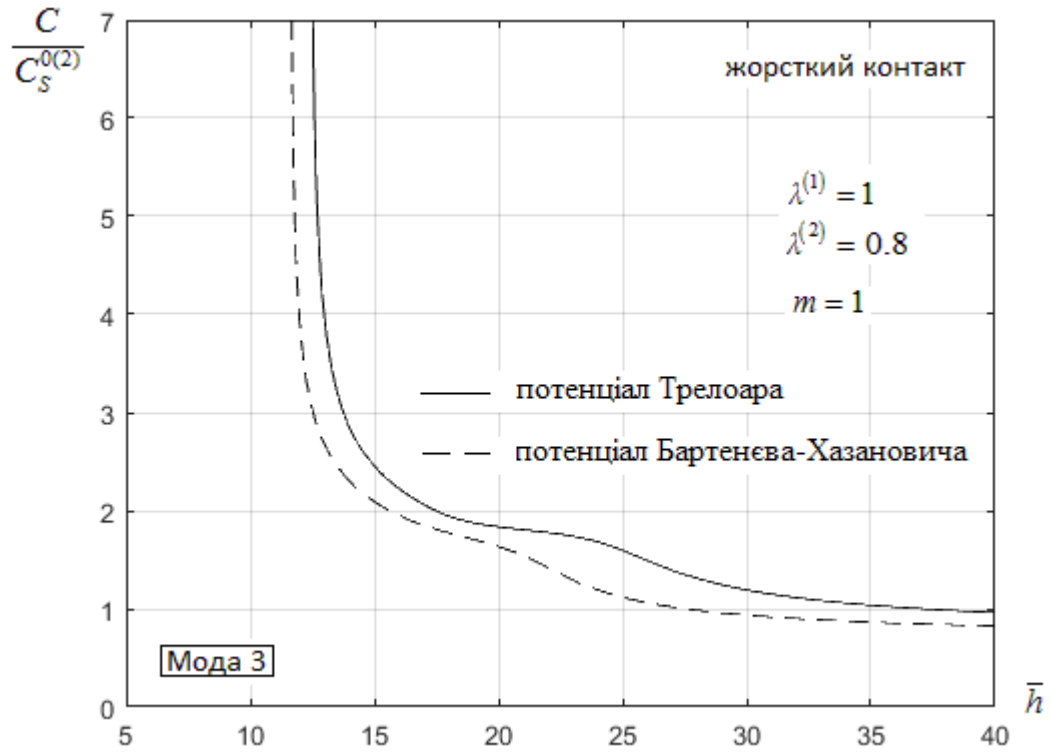


Рис. 4.55

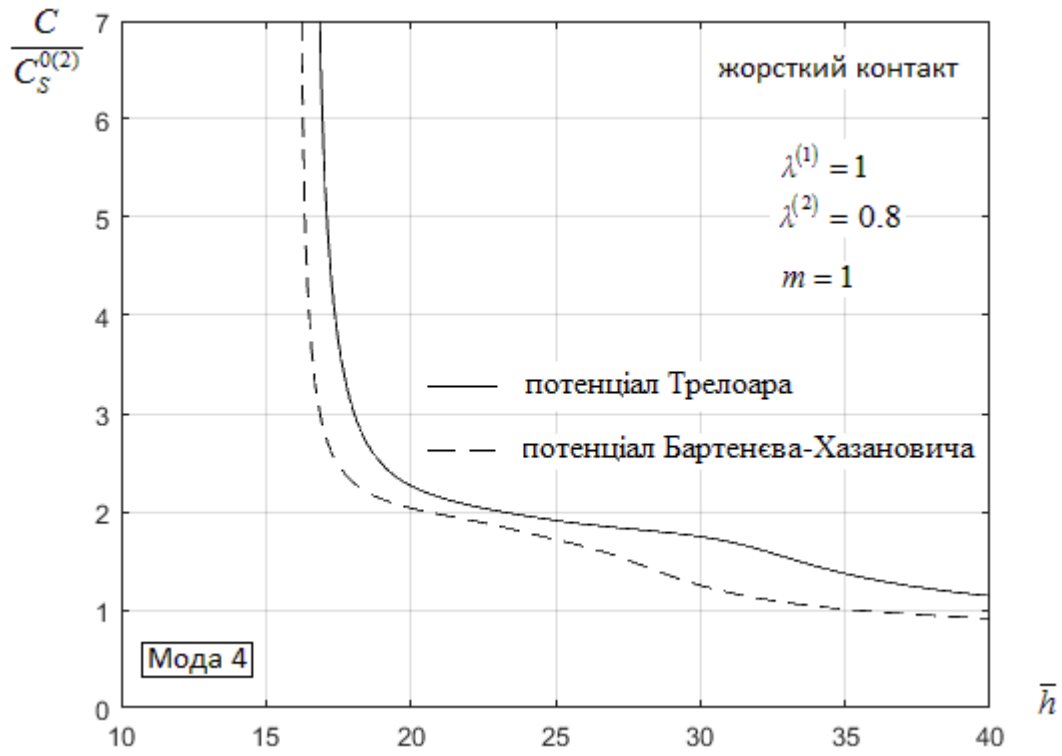


Рис. 4.56

Рис. 4.45 – 4.50 відповідають контакту з повним проковзуванням, а рис. 4.51 – 4.56 – повному контакту між шарами композиту.

Отримані результати свідчать про те, що вибір пружного потенціалу (моделі пружного тіла) має суттєве значення.

При заданому початковому напруженому стані фазова швидкість для пружного потенціалу Бартенєва-Хазановича майже в усьому діапазоні частот, що розглядалися, нижча, ніж для потенціалу типу Трелоара.

В роботі також проведено порівняння двох моделей процесу поширення пружних хвиль в нестисливому композитному матеріалі: плоскої хвилі та вісесиметричної.

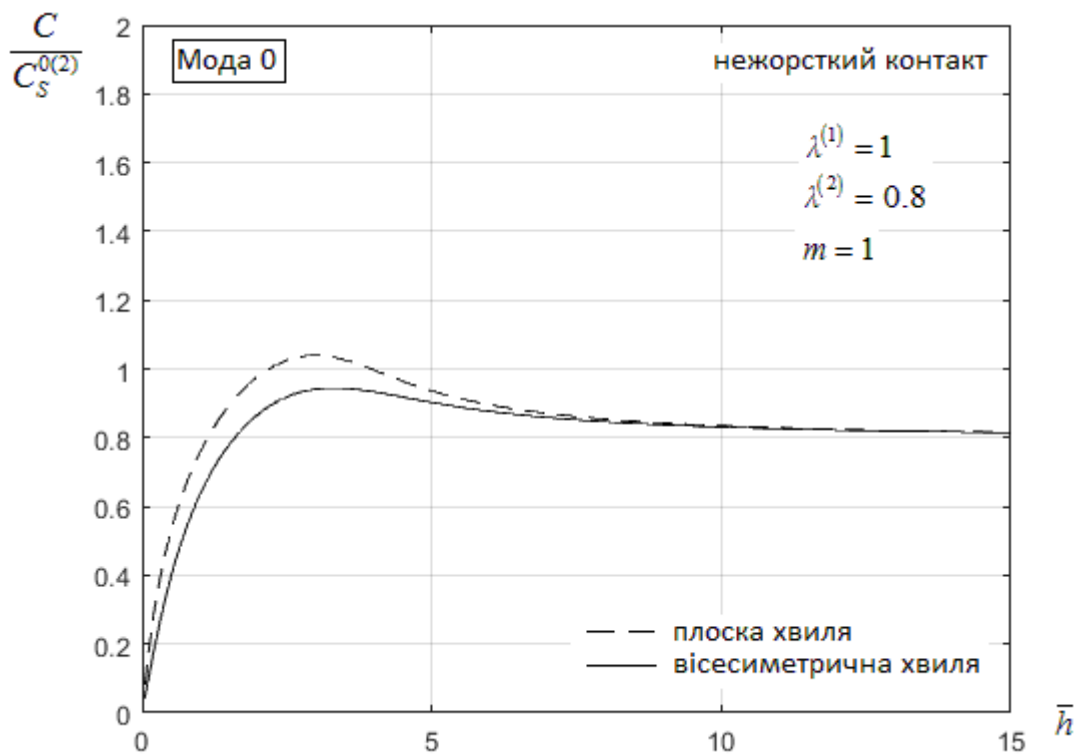


Рис. 4.57

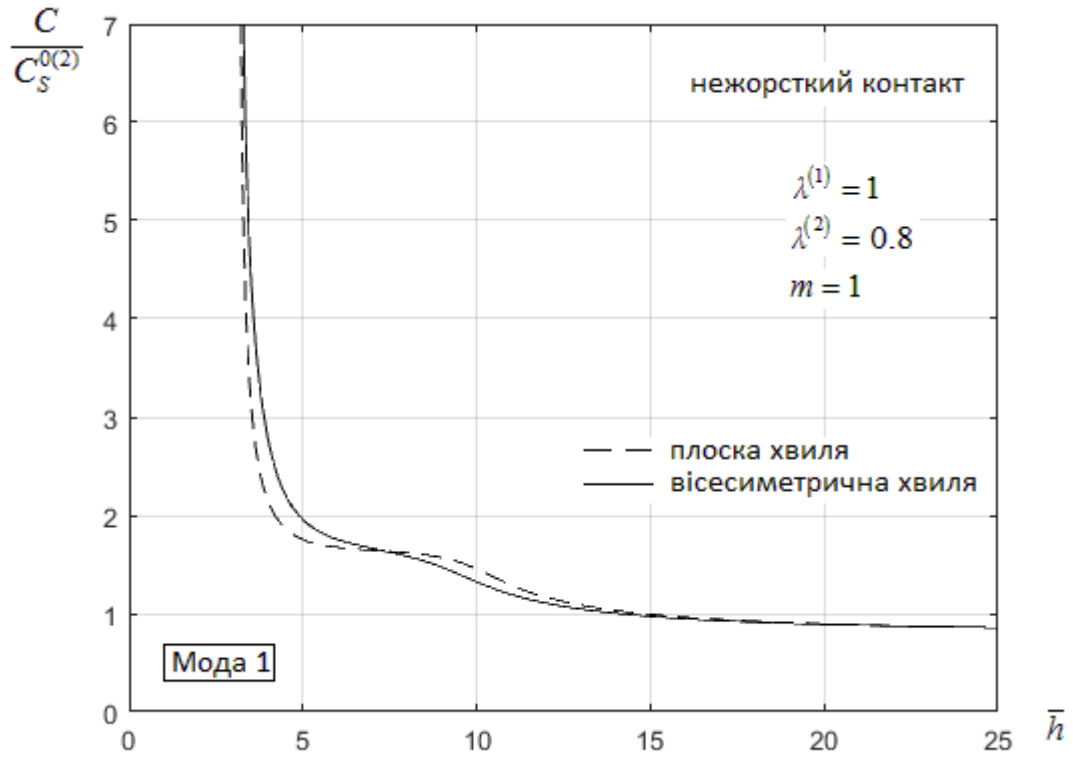


Рис. 4.58

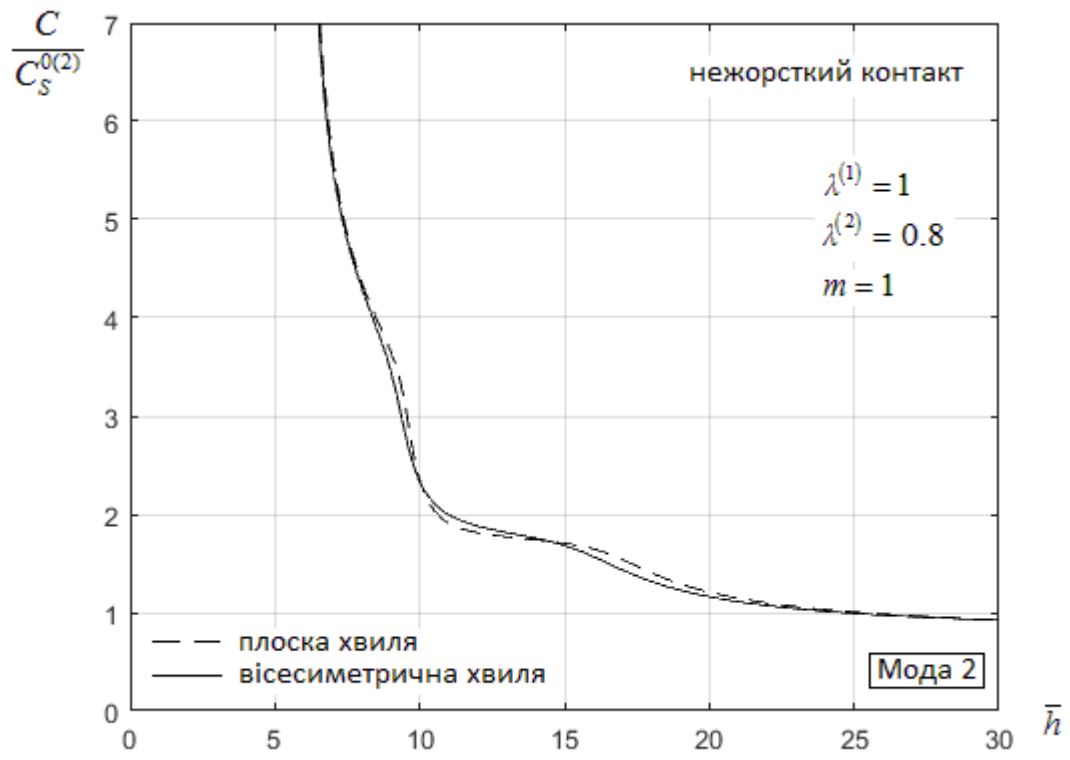


Рис. 4.59

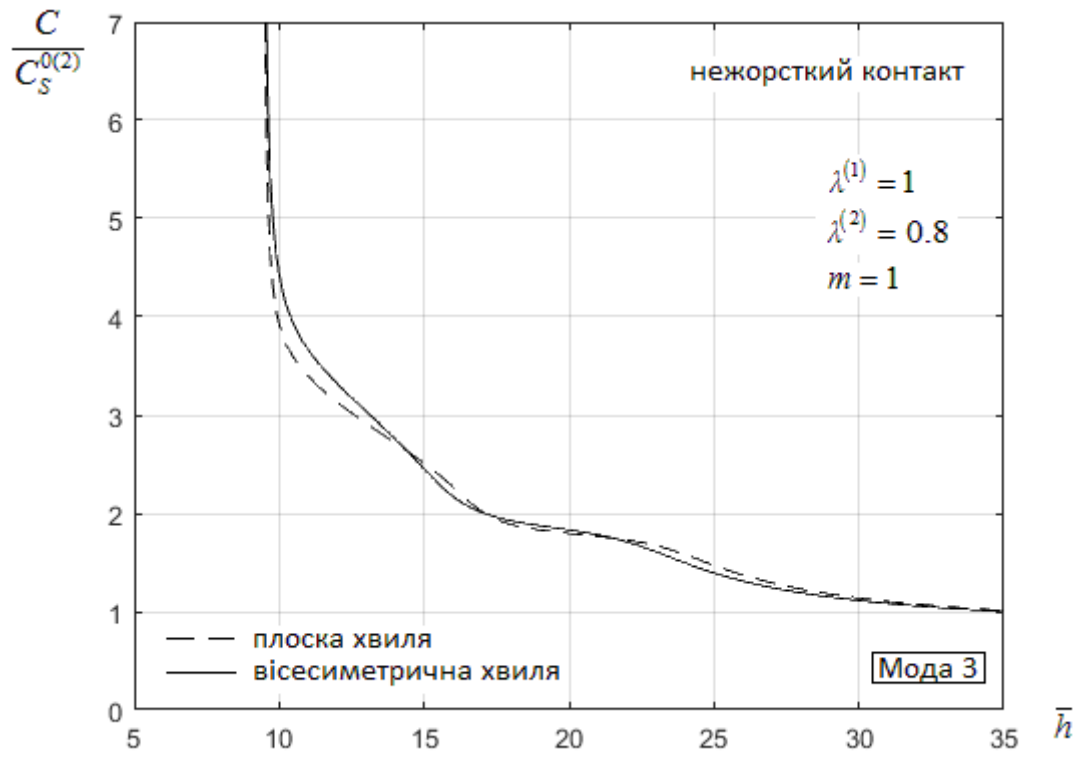


Рис. 4.60

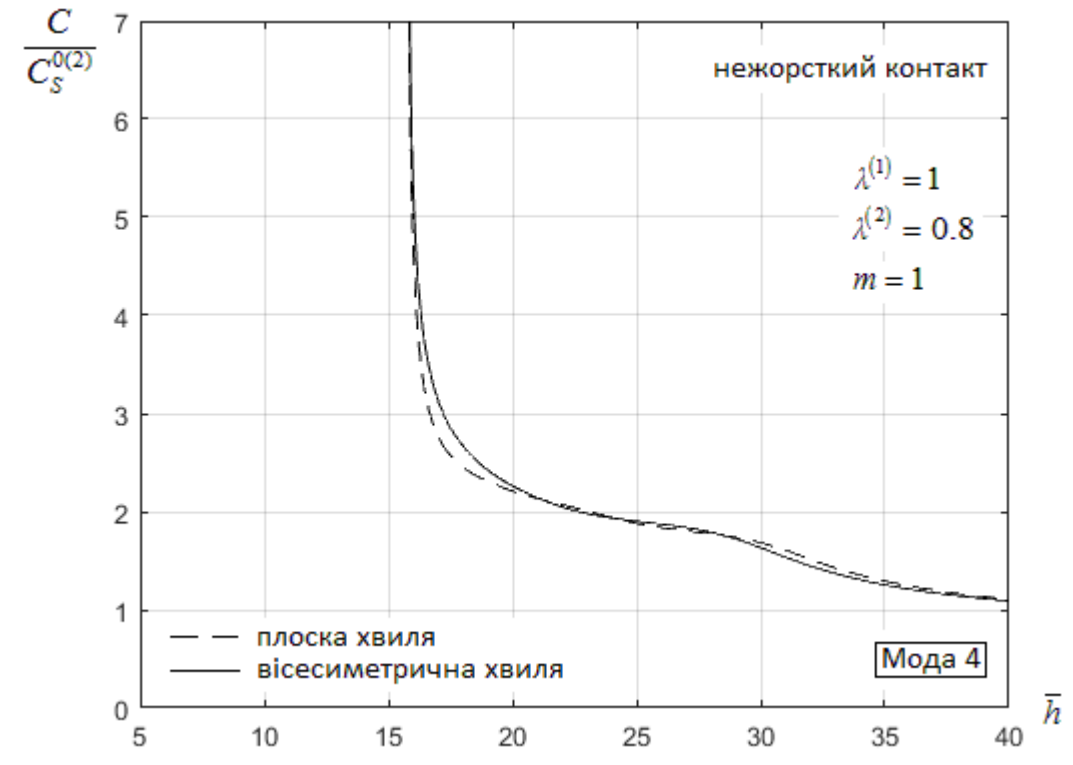


Рис. 4.61

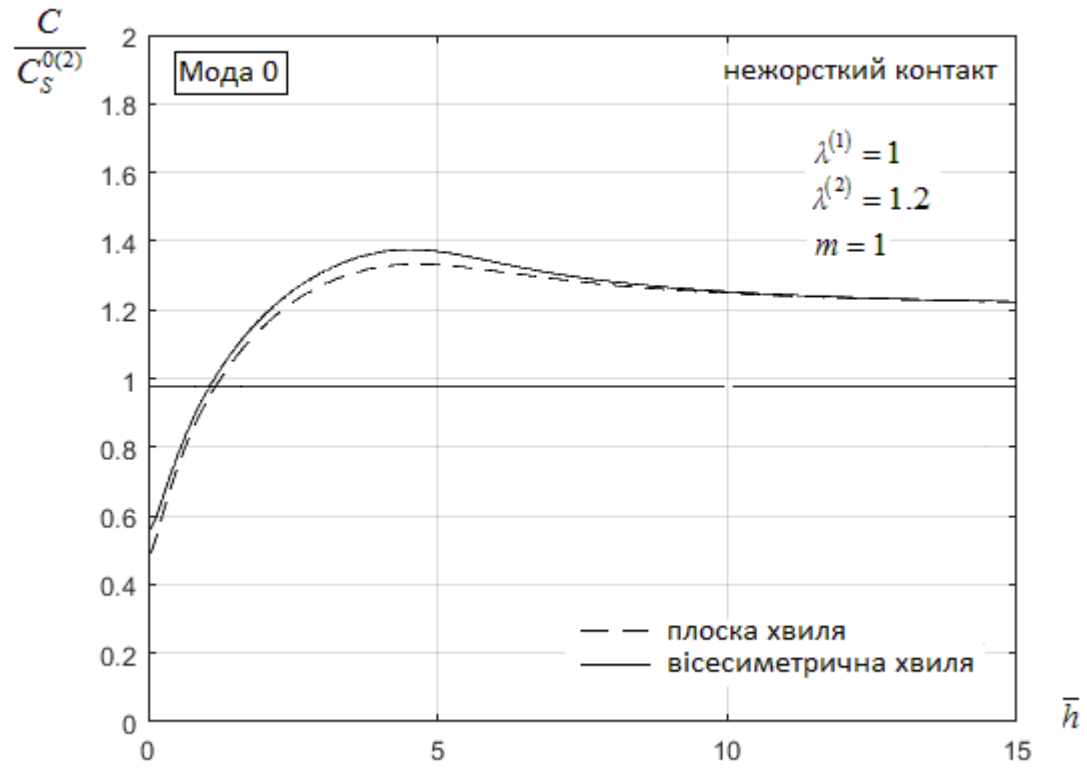


Рис. 4.62

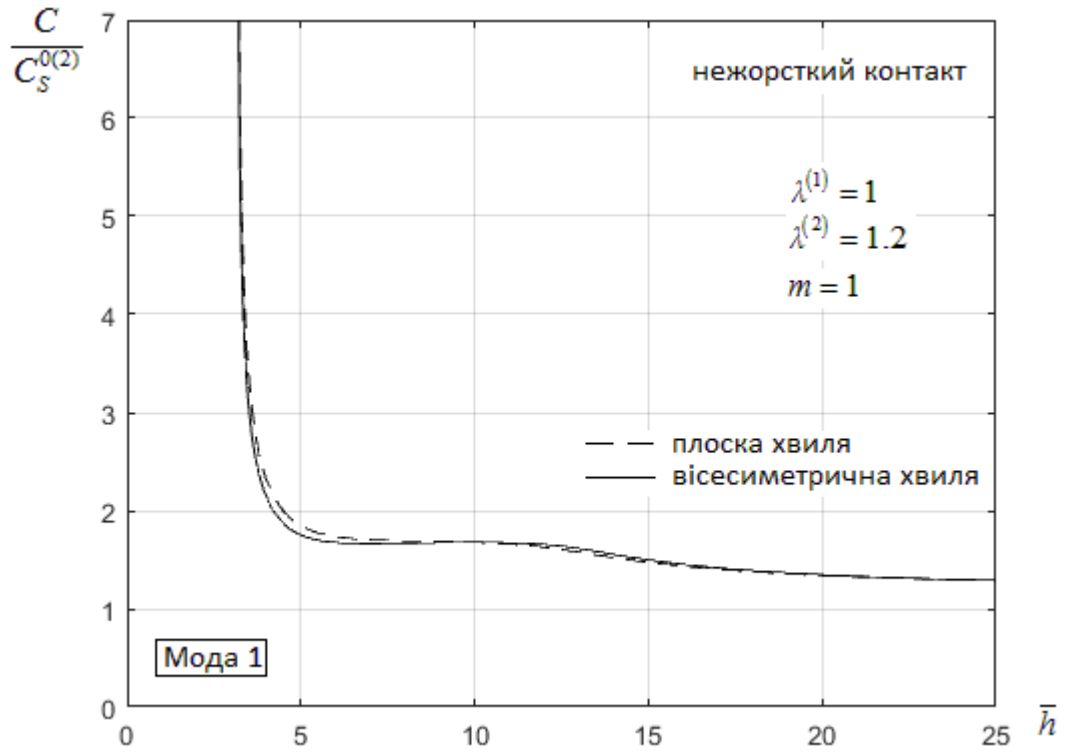


Рис. 4.63

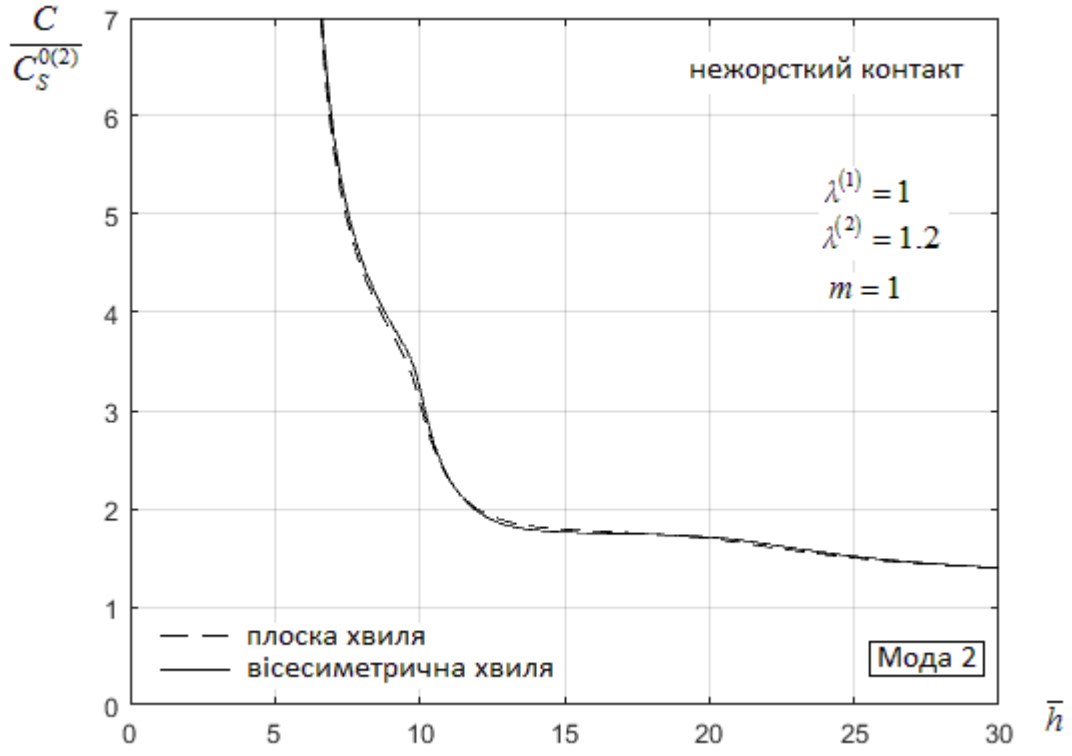


Рис. 4.64

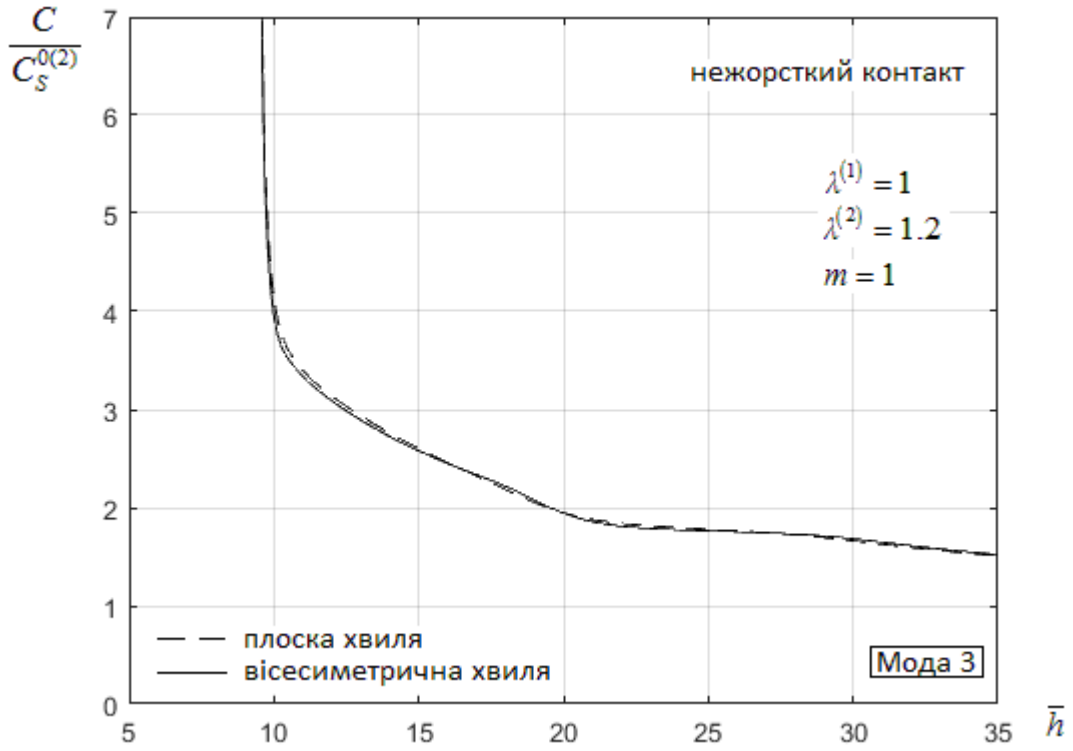


Рис. 4.65

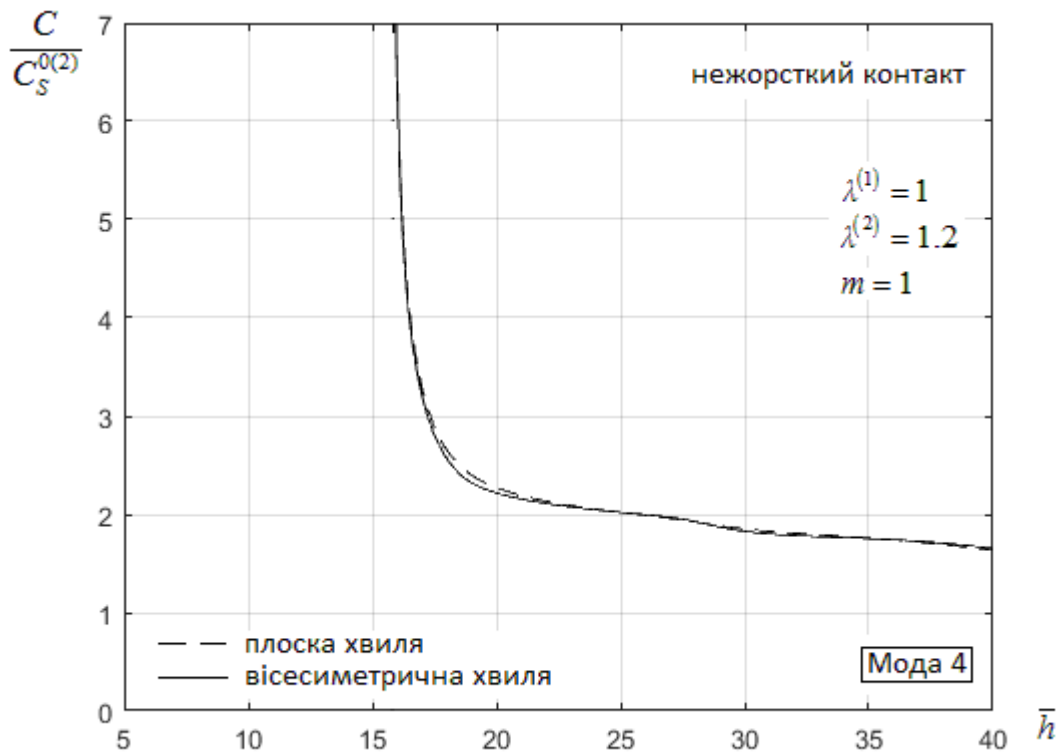


Рис. 4.66

При ненапруженому початковому стані дисперсійні криві для цих двох моделей процесу поширення пружних хвиль співпадають і мають вигляд, показаний на рис. 4.5 – 4.10.

Розглядався початковий напружений стан $\lambda_1^{(1)} = 1$; $\lambda_1^{(2)} = 0.8$ (рис. 4.57 – 4.61) та $\lambda_1^{(1)} = 1$; $\lambda_1^{(2)} = 1.2$ (рис. 4.62 – 4.66). Контакт між шарами композитного матеріалу – нежорсткий (з повним проковзуванням).

На рис. 4.57 – 4.66 суцільні криві відповідають дисперсійним кривим для вісесиметричної хвилі, а пунктирні – для плоскої хвилі.

Результати показують незначну відмінність в значеннях фазової швидкості плоскої квазіпоперечної хвилі та вісесиметричної квазіпоперечної хвилі. В певних діапазонах частот швидкість плоскої і вісесиметричної хвиль співпадають або дуже близькі.